

5

बिंदुओं तथा रेखाओं द्वारा बनी कहानियाँ



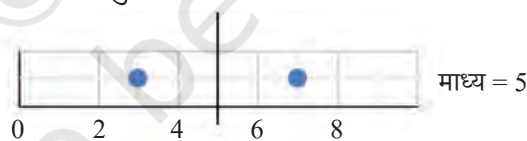
5.1 संतुलन कार्य

गत वर्ष हमने माध्य और माध्यिका के विषय में सीखा था। स्मरण कीजिए कि दिए गए आँकड़ों का माध्य, आँकड़ों के समस्त मानों के योग को मानों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है। इसके साथ ही समस्त मानों को क्रमबद्ध करने पर प्राप्त मध्य मान, माध्यिका कहलाती है।

इस अध्याय में हम माध्य व माध्यिका को एक अन्य परिप्रेक्ष्य से समझने का प्रयास करेंगे और यह जानेंगे कि परिवर्तनशील आँकड़ों के साथ माध्य किस प्रकार परिवर्तित होता है।

- ❓ कोई दो संख्याएँ लीजिए। उनका औसत अथवा समांतर माध्य ज्ञात कीजिए। अन्य संख्या युग्म लेकर इस प्रक्रिया को दोहराइए। आपको क्या परिणाम प्राप्त होते हैं?

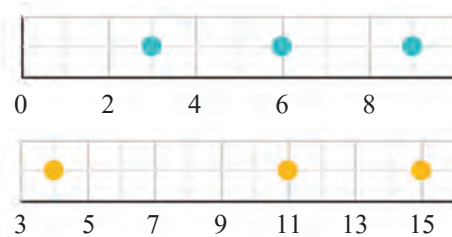
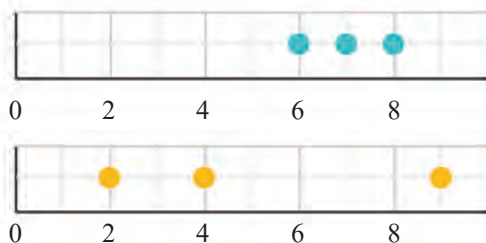
उदाहरण के लिए— मान लीजिए दो संख्याएँ 3 और 7 हैं। इनका औसत $\frac{3+7}{2} = 5$ है। अब संख्याओं का एक और युग्म लेते हैं। मान लीजिए संख्याएँ 8 और 9 हैं, इनका औसत $\frac{8+9}{2} = 8.5$ है। दोनों संख्याओं (3 व 7) को बिंदु आलेख द्वारा दर्शाने पर हमें प्राप्त होता है—



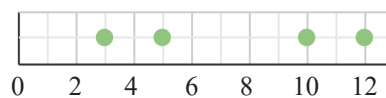
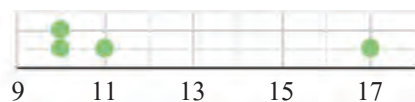
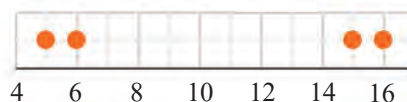
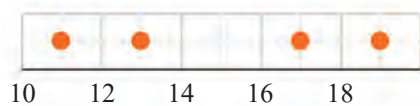
ध्यान दीजिए कि माध्य दोनों संख्याओं के ठीक मध्य में है।

हमने पूर्व में पढ़ा है कि समांतर माध्य केंद्रीय प्रवृत्ति का एक माप होता है और यह दिए गए आँकड़ों के 'केंद्र' को दर्शाता है। आइए, देखते हैं कि तीन संख्याओं के लिए माध्य किस प्रकार 'केंद्र' को दर्शाता है।

- ❓ नीचे दिए प्रत्येक आँकड़ों के संग्रह का माध्य ज्ञात कीजिए एवं चिह्नित कीजिए।

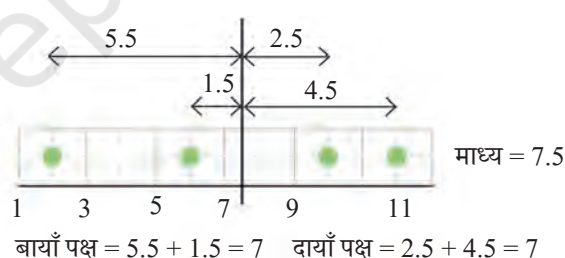
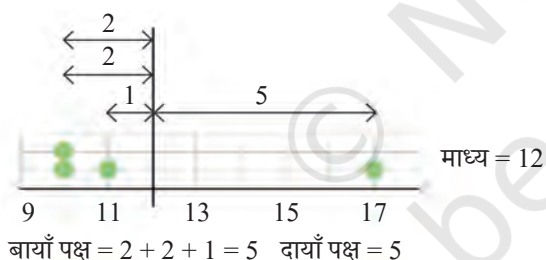
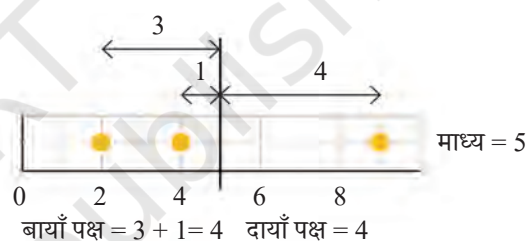
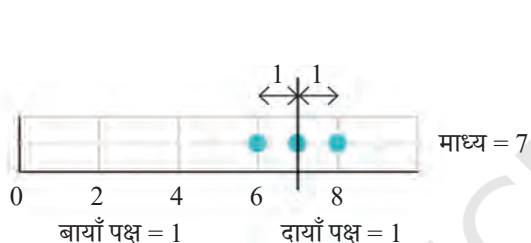


- ? क्या आप व्याख्या कर सकते हैं कि माध्य किस प्रकार प्रत्येक संग्रह का केंद्र होता है?
- ? नीचे दिए संग्रहों के लिए माध्य चिह्नित कीजिए।



- ? क्या आप व्याख्या कर सकते हैं कि माध्य प्रत्येक संग्रह का केंद्र कैसे होता है?

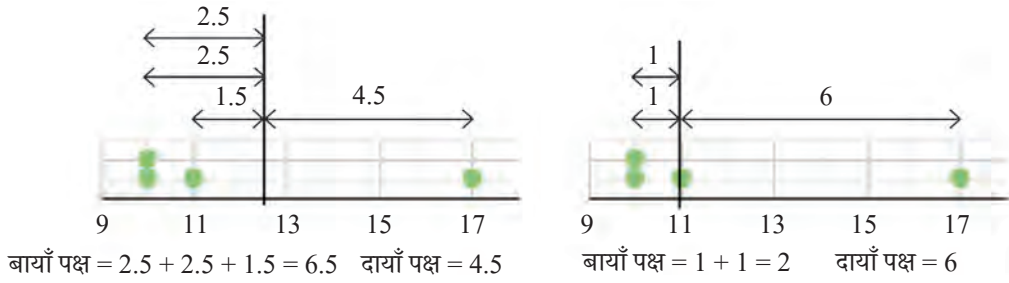
क्या माध्य दोनों छोर बिंदुओं या चरम बिंदुओं का मध्य बिंदु होता है? यह सदैव सत्य नहीं है। बल्कि माध्य के दोनों ओर की कुल दूरियाँ समान होती हैं। इसे नीचे दिए बिंदु आलेखों द्वारा दर्शाया गया है।



- ? सत्यापित कीजिए कि यह पूर्व में दिए गए आँकड़ों के सभी संग्रहों के लिए मान्य हैं।
- ? क्या ऐसे एक से अधिक 'केंद्र' हो सकते हैं? दूसरे शब्दों में क्या कोई अन्य ऐसा मान है जिससे बड़े मानों और छोटे मानों की दूरियों का योग समान हो?
- ? संख्याओं के संग्रह 10, 10, 11 और 17, जिनका माध्य 12 है, के लिए मान लीजिए कि 12 से बड़ा दूसरा कोई केंद्र है।

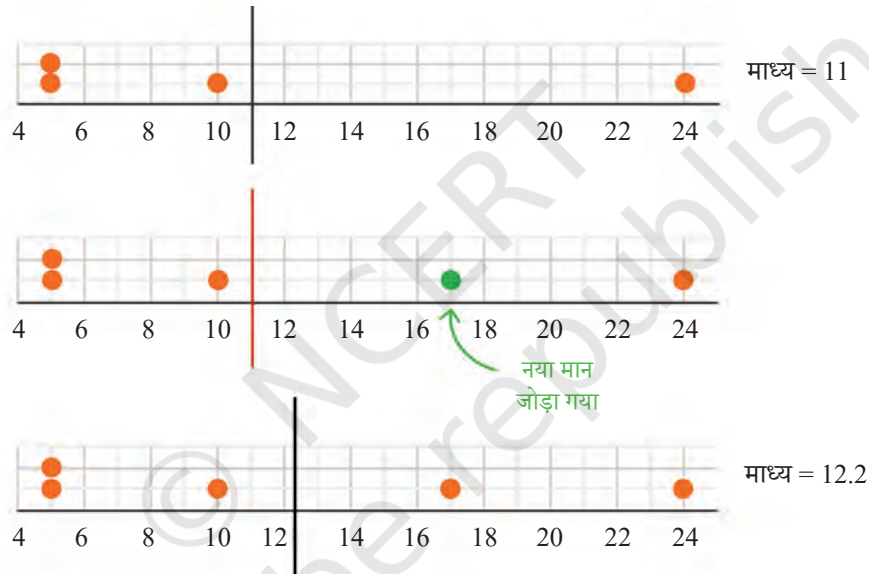
स्पष्टतः बाईं ओर की सभी दूरियाँ बढ़ेंगी और दाईं ओर की दूरियाँ घटेंगी। अतः अब यह 'केंद्र' नहीं रह जाता है। इसी प्रकार 12 से छोटे किसी भी मान के लिए बाईं ओर की दूरियाँ घटेंगी और दाईं ओर की दूरियाँ बढ़ेंगी।

नीचे दिए चित्रों में ये दोनों स्थितियाँ प्रदर्शित की गई हैं। इसलिए केवल एक ही केंद्र होता है।



? क्या आँकड़ों में एक नया मान सम्मिलित करने पर माध्य में परिवर्तन होगा अर्थात् माध्य घटेगा या बढ़ेगा?

जब माध्य से बड़ा कोई नया मान सम्मिलित किया जाता है तब बाई ओर की दूरियों के योग और दाई ओर की दूरियों के योग के मध्य संतुलन को बनाए रखने के लिए माध्य बढ़ जाता है, जैसा नीचे दिए चित्रों में प्रदर्शित किया गया है।



इसी प्रकार जब माध्य से छोटा कोई मान आँकड़ों में सम्मिलित किया जाता है तब नया माध्य पहले वाले माध्य से छोटा हो जाएगा।

? पहले से विद्यमान किसी मान को हटाने से माध्य पर क्या प्रभाव पड़ता है? कब माध्य घटेगा, बढ़ेगा अथवा समान ही रहेगा?

? यदि माध्य के समान मान को सम्मिलित किया जाए या हटाया जाए, तो माध्य पर क्या प्रभाव पड़ता है?

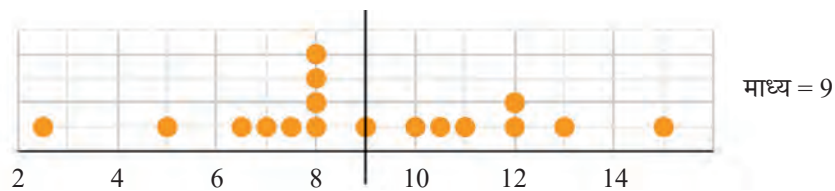
गत वर्ष हमने माध्य की उचित साझेदारी वाली जिस व्याख्या का अध्ययन किया था, उसका उपयोग करके इसे समझाने का प्रयास कीजिए।

अपरिवर्तनशील माध्य!

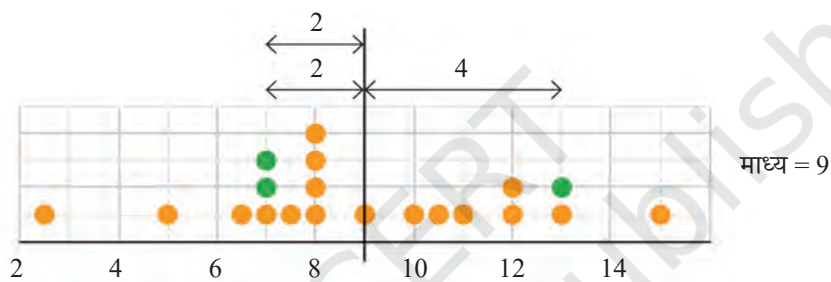
हमने पूर्व में देखा कि किसी मान को सम्मिलित करने या हटाने पर माध्य किस प्रकार परिवर्तित होता है।



- ? पता लगाइए कि क्या यह संभव है कि किन्हीं दो मानों को इस प्रकार सम्मिलित किया जाए या हटाया जाए कि माध्य अपरिवर्तित रहे।
इस प्रयोग को करने के लिए आप निम्नलिखित आँकड़ों का उपयोग कर सकते हैं।



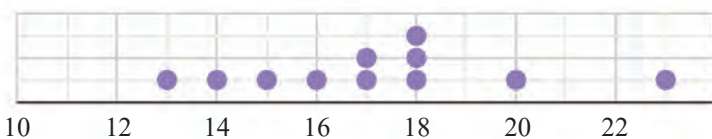
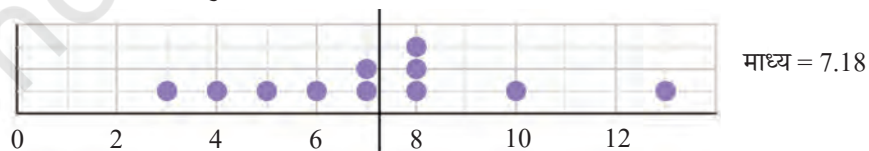
- ? माध्य को परिवर्तित किए बिना 3 मानों को सम्मिलित करने या हटाने के संबंध में आपका क्या विचार है? क्या यह संभव है?
- ? क्या हम माध्य से छोटे दो मान और माध्य से बड़े एक मान को इस प्रकार सम्मिलित कर सकते हैं, जिससे माध्य समान बना रहे? नीचे एक संभावना दर्शाई गई है—



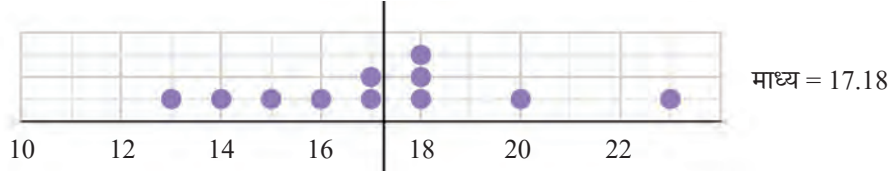
- ? माध्य से बड़े दो मान और माध्य से छोटे एक मान को इस प्रकार सम्मिलित करने का प्रयास कीजिए कि माध्य समान बना रहे।

सापेक्षतः अपरिवर्तित!

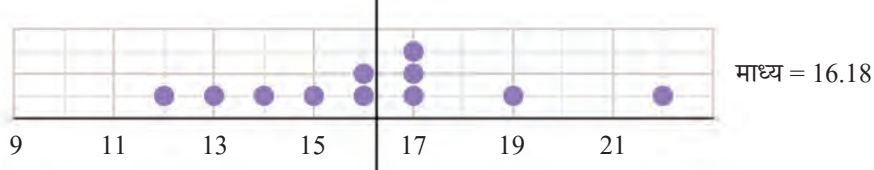
- ? हमने देखा कि आँकड़ों के संग्रह में मान सम्मिलित करने या हटाने पर माध्य पर क्या प्रभाव पड़ता है। क्या होगा यदि आँकड़ों के संग्रह के प्रत्येक मान में किसी नियत संख्या से वृद्धि हो?
- ? दिए गए आँकड़ों— 8, 3, 10, 13, 4, 6, 7, 7, 8, 8, 5 पर विचार कीजिए। इनका माध्य ज्ञात कीजिए।
- ? अब इस संग्रह के प्रत्येक मान में 10 की वृद्धि से प्राप्त आँकड़ों— 18, 13, 20, 23, 14, 16, 17, 17, 18, 18, 15 पर विचार कीजिए। इनका माध्य क्या है? क्या इसे ज्ञात करने की कोई त्वरित विधि है? [संकेत— नीचे दिए गए बिंदु आलेखों का अवलोकन कीजिए जो दो आँकड़ा संग्रहों के संगत हैं।]



नए संग्रह के माध्य में भी 10 की वृद्धि हो जाती है। ध्यान दीजिए कि माध्य की सापेक्ष स्थिति अपरिवर्तित रहती है।



यदि प्रत्येक मान में 1 की कमी कर दी जाए तो हमें नीचे दिया गया बिंदु आलेख प्राप्त होता है—



इसे बीजगणित के माध्यम से समझा जा सकता है—

मान लीजिए दिए गए संग्रह में n मान हैं। माना कि इन मानों को $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ से दर्शाया जाता है। इनका औसत निम्न प्रकार से दिया जाता है—

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = a$$

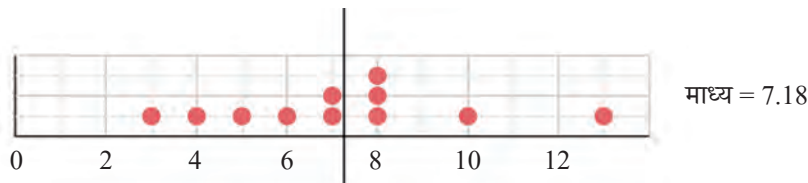
जब एक नियत संख्या, मान लीजिए 3 को संग्रह के सभी मानों में जोड़ा जाए तो नया औसत बनता है—

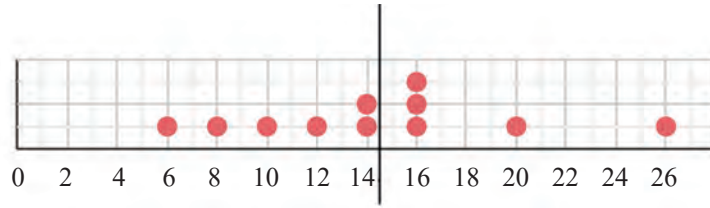
$$\begin{aligned} & \frac{(x_1 + 3) + (x_2 + 3) + (x_3 + 3) + \dots + (x_n + 3)}{n} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n + 3n}{n} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} + \frac{3n}{n} \\ &= a + 3 \end{aligned}$$

इस प्रकार नया औसत पिछले औसत से 3 अधिक है।

- ❓ बीजगणित का प्रयोग करते हुए यह समझाने का प्रयास कीजिए कि जब संग्रह के प्रत्येक मान से एक नियत संख्या, मान लीजिए 2 को घटाया जाता है तो बताइए कि औसत क्या होगा।
- ❓ गत वर्ष हमने माध्य की उचित साझेदारी वाली जिस व्याख्या का अध्ययन किया था, उसका उपयोग करते हुए इसे समझाने का प्रयास कीजिए।
- ❓ यदि संग्रह के प्रत्येक मान को दोगुना कर दिया जाए तो औसत पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

संभवतः आपने अनुमान लगा लिया होगा कि औसत भी दोगुना हो जाएगा। नीचे दिए गए उदाहरण में पूर्व में उपयोग किए गए आँकड़ों से ही बिंदु आलेख निरूपित किया गया है—





हम देख सकते हैं कि औसत दोगुना हो गया है।

आइए, इसे बीजगणित का प्रयोग करके सिद्ध करते हैं।

मान लीजिए कि संग्रह में n मान हैं। माना इन मानों को $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ से दर्शाया जाता है। इनका औसत है—

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = a$$

जब संग्रह के प्रत्येक मान को एक नियत संख्या, मान लीजिए 5, से गुणा किया जाता है तब नया औसत इस प्रकार है—

$$\begin{aligned} & \frac{(5x_1) + (5x_2) + (5x_3) + \dots + (5x_n)}{n} \\ &= \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) \times 5}{n} \quad (\text{बंटन गुणधर्म के प्रयोग से}) \\ &= \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)}{n} \times 5 \\ &= 5a \end{aligned}$$

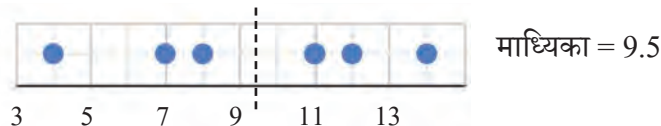
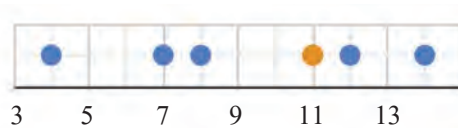
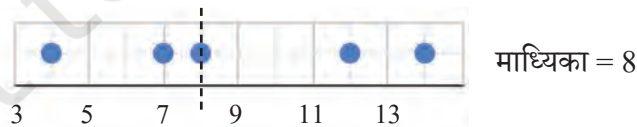
इस प्रकार नया औसत पूर्व औसत का 5 गुना है।

माध्यिका में परिवर्तन

हम जानते हैं कि माध्यिका, क्रमबद्ध आँकड़ों में मध्य मान होती है। इससे छोटे मानों की संख्या और इससे बड़े मानों की संख्या समान होती है।

? आँकड़ों में एक नया मान सम्मिलित करने पर माध्यिका बढ़ेगी या घटेगी?

आइए, निम्नलिखित आँकड़ों पर विचार करते हैं। इन आँकड़ों की माध्यिका 8 है।



मान लीजिए हम इस संग्रह में एक मान 11 सम्मिलित करते हैं। सम्मिलित नया मान पिछली माध्यिका (8) से बड़ा है, अतः अब माध्यिका 8 नहीं हो सकती क्योंकि इससे बड़े मानों की संख्या अधिक है। इसलिए माध्यिका भी बढ़ जाएगी। अब नीचे दिए चित्र अनुसार माध्यिका, मध्य के दो मानों 8 और 11 का औसत होगी, जो 9.5 है।

इसी प्रकार हम यह तर्क दे सकते हैं कि जब आँकड़ों में माध्यिका से छोटे मान को सम्मिलित किया जाता है तो माध्यिका घट जाएगी।

अज्ञात को ज्ञात करना

- ? कोच बलवान ने नीचे दर्शाए अनुसार कुश्ती खिलाड़ियों (पहलवानों) के भार का माप किया तथा उनका औसत ज्ञात किया। परंतु लिखे गए मानों में से एक मान मिट गया। क्या आप लुप्त मान ज्ञात कर सकते हैं?

$$\text{खिलाड़ियों का औसत भार} = \frac{\text{सभी खिलाड़ियों के भार का योग}}{\text{खिलाड़ियों की संख्या}}$$

मान लीजिए अज्ञात भार w किलोग्राम है।

$$= \frac{42 + 40 + 39 + 33 + 48 + 38 + 42 + 35 + 32 + w}{10} = 39.2$$

इसे सरल करने पर हमें प्राप्त होता है—

$$349 + w = 392$$

$$w = 392 - 349 = 43$$

अतः अज्ञात मान 43 किलोग्राम है।

- ? वेंकैया अपने खेत में नारियल की फसल का लेखा-जोखा करता है। वह प्रति वृक्ष औसत फसल 25.6 प्राप्त करता है। उसका पुत्र गणना की जाँच करता है और उसे ज्ञात होता है कि त्रुटिवश एक वृक्ष की फसल का मान वास्तविक मान से 3 अधिक लिखा गया है। यदि वृक्षों की संख्या 15 है तो क्या आप सही औसत ज्ञात कर सकते हैं?

$$\text{प्रति वृक्ष औसत फसल} = \frac{\text{तोड़े गए नारियलों की कुल संख्या}}{\text{पेड़ों की संख्या}}$$

प्रति वृक्ष फसल के आँकड़े नहीं दिए गए हैं।

- ? क्या हम इस स्थिति में भी तोड़े गए नारियलों की संख्या ज्ञात कर सकते हैं?

मान लीजिए प्रारंभ में तोड़े गए नारियलों की संख्या z है। दिए गए आँकड़ों के आधार पर—

$$25.6 = \frac{z}{15}$$

इसे सरल करने पर

$$z = 25.6 \times 15 = 384$$

प्रारंभ में तोड़े गए नारियलों की संख्या 384 है।

हमें ज्ञात है कि एक वृक्ष की फसल का मान वास्तविक संख्या से 3 अधिक है। अतः वास्तविक कुल फसल का मान $384 - 3 = 381$ है।

$$\text{सही औसत फसल} = \frac{381}{15} = 25.4$$



आवृत्ति सहित माध्य और माध्यिका

- ? आपकी कक्षा में पढ़ने वाले विद्यार्थियों के परिवारों का औसत आकार क्या है? आप इसे किस प्रकार ज्ञात करेंगे?

हम प्रत्येक विद्यार्थी के परिवार के सदस्यों के आँकड़े एकत्रित कर सकते हैं। इन्हें जोड़ लीजिए और इसे विद्यार्थियों की संख्या से विभाजित कीजिए। दाईं ओर दी गई तालिका में किसी कक्षा में विद्यार्थियों के परिवारों के आकार के आँकड़े दिए गए हैं।

संख्या	आवृत्ति
3	3
4	11
5	9
6	7
7	3
8	1
9	1
10	1

- ? इस कक्षा में परिवारों का औसत आकार क्या है?

आपमें से कुछ विद्यार्थियों ने सोचा होगा “यह तो सरल है! यह

$$\frac{3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10}{8} = \frac{52}{8} = 6.5 \text{ होगा}”$$

ध्यान रहे कि औसत ज्ञात करने के लिए आँकड़ों में दिए सभी मानों को सम्मिलित करना होता है। संख्या 3, तीन बार आई है एवं संख्या 4, ग्यारह बार आई है तथा इसी प्रकार आगे भी संख्याएँ विद्यमान हैं। क्या ये आपकी गणना में सम्मिलित की गई हैं?

हम जानते हैं कि औसत = $\frac{\text{आँकड़ों में सभी मानों का योग}}{\text{आँकड़े में मानों की संख्या}}$

प्रत्येक मान की आवृत्तियों को गणना में लेते हुए औसत होगा

$$\begin{aligned} &= \frac{(3 \times 3) + (4 \times 11) + (5 \times 9) + (6 \times 7) + (7 \times 3) + (8 \times 1) + (9 \times 1) + (10 \times 1)}{3 + 11 + 9 + 7 + 3 + 1 + 1 + 1} \\ &= \frac{9 + 44 + 45 + 42 + 21 + 8 + 9 + 10}{36} \\ &= \frac{188}{36} = 5.22 \end{aligned}$$

कक्षा में परिवारों के आकार का औसत 5.22 है।

- ? इस कक्षा में परिवारों के आकार की माध्यिका क्या है?

हम जानते हैं कि आँकड़ों के इस संग्रह में 36 मान दिए गए हैं।

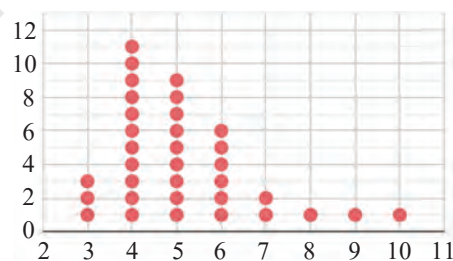
आँकड़ों के मानों को क्रमबद्ध करने पर प्राप्त अनुक्रम में 18 वें एवं 19 वें मान का औसत ही माध्यिका होगी।

- ? क्या हमें सभी 36 संख्याओं को क्रम में लिखना होगा? क्या इसे ज्ञात करने की कोई त्वरित विधि है?

हम उस तालिका का उपयोग कर सकते हैं जिसमें आवृत्तियों को सूचीबद्ध किया गया हो। हम सबसे छोटे मान से प्रारंभ करके क्रमिक रूप से आवृत्तियों को जोड़ते जाते हैं जब तक कि हम 18 और 19 तक नहीं पहुँच जाते।

3 और 4 की आवृत्तियों को जोड़ने पर हमें $3 + 11 = 14$ प्राप्त होता है। इसका अर्थ है कि मानों को क्रमबद्ध करने के पश्चात 14वें स्थान पर मान 4 प्राप्त होगा। 3, 4 और 5 की आवृत्तियों को जोड़ने पर हमें $3 + 11 + 9 = 23$ प्राप्त होता है। इसका अर्थ है कि मानों को क्रमबद्ध करने पर 23वें स्थान पर मान 5 होगा। हम देख सकते हैं कि 15वें से 23वें स्थान तक सभी मान 5 हैं। अतः इन आँकड़ों की माध्यिका 5 है।

संख्या	आवृत्ति
3	3
4	11
5	9
6	7
7	3
8	1
9	1
10	1



स्प्रेडशीट

सुधाकर ने नीचे दी गई तालिका में कक्षा 8 के विद्यार्थियों द्वारा मध्यावधि परीक्षा में प्राप्त अंकों का संग्रह किया है—

नाम	ओडिया	तेलुगु	अंग्रेजी	गणित	सामाजिक विज्ञान	विज्ञान
रत्ना	25	39	29	36	34	37
नागेश	41	43	48	39	40	39
अश्विन	29	31	33	34	30	28
फारूक	47	46	38	42	49	44
मृणाल	33	35	28	32	30	36
गौरी	27	29	34	31	32	30
पंकज	16	19	22	17	18	20
जया	31	38	40	50	43	46
गणेश	39	37	35	38	36	40
श्रवण	12	17	21	20	14	18
ऐश्वर्या	48	45	46	47	44	43
हरि	25	28	24	21	23	26
तृप्ति	29	36	30	33	27	33
वीरेश	23	25	28	31	19	22
विद्या	34	36	37	40	32	34
संस्कृति	35	42	41	46	38	40
शंकर	42	45	39	36	31	39
वैष्णवी	37	32	29	33	31	35
गोविंद	15	18	12	20	20	18
शिव	29	24	32	34	28	30
तरुण	41	44	39	43	37	42
ज्योति	29	30	33	28	34	29

सुधाकर को प्रत्येक विद्यार्थी द्वारा प्राप्त कुल अंकों की गणना करनी है। वह प्रत्येक विषय में प्राप्त औसत अंकों को भी जानना चाहता है। परंतु संख्याएँ तो बहुत-सी हैं! इस कार्य को पूर्ण करने में उसे बहुत समय और परिश्रम लगेगा। निस्संदेह, कार्य को गति देने के लिए वह परिकलित्र (कैलकुलेटर) का उपयोग कर सकता है।

क्या इस प्रक्रिया को और तीव्रगति से करने का कोई उपाय है?

एक उपाय है— संगणक (कंप्यूटर) का उपयोग करना। संगणक में विभिन्न एप्लिकेशन्स या टूल्स होते हैं जिनका उपयोग कार्यों को पूर्ण करने के लिए किया जा सकता है। ऐसी एक एप्लिकेशन है— स्प्रेडशीट (विस्तृत पत्रक) जो एक डिजिटल पुस्तिका की भाँति होती है। इसमें छोटे-छोटे बॉक्स की पंक्तियाँ व स्तंभ बने होते हैं, जिन्हें **कोष्ठिका** (सेल) कहते हैं। प्रत्येक कोष्ठिका में हम शब्द या संख्याएँ टंकित (टाइप) कर सकते हैं। नीचे दिए गए चित्र में विस्तृत पत्रक का एक आशु चित्र (स्नेपशॉट) दर्शाया गया है जिसमें सुधाकर ने अपनी कक्षा के अंकों के आँकड़े अंकित किए हैं। आगे बढ़ने से पूर्व संगणक का उपयोग करने का प्रयास कीजिए।

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	नाम	ओड़िया	तेलुगू	अंग्रेजी	गणित	सा. विज्ञान	विज्ञान	कुल
2	रत्ना	25	39	29	36	34	37	
3	नागेश	41	43	48	39	40	39	
4	अश्विन	29	31	33	34	30	28	
5	फारूक	47	46	38	42	49	44	
6	मृणाल	33	35	28	32	30	36	
7	गौरी	27	29	34	31	32	30	
8	पंकज	16	19	22	17	18	20	

प्रत्येक विषय के औसत अंक की गणना तथा प्रत्येक विद्यार्थी द्वारा प्राप्त कुल अंकों की गणना करने के पूर्व आइए स्प्रेडशीट की संरचना को और इसे पढ़ने की प्रक्रिया को समझते हैं।

❓ क्या आप बता सकते हैं कि फारूक द्वारा गणित में प्राप्त अंक किस कोष्ठिका में हैं?

कोष्ठिका का नाम और संदर्भ, स्तंभ संकेतक A, B, C, ... और पंक्ति संकेतक 1, 2, 3, ... का प्रयोग करके दिया जाता है। फारूक के गणित में अंक E5 कोष्ठिका में हैं।

❓ क्या आप बता सकते हैं कि स्तंभ B7 में कौन-से आँकड़े हैं?

❓ अश्विन ने किन विषयों में 30 से अधिक अंक प्राप्त किए हैं?

हम स्प्रेडशीट का प्रयोग करके योग और औसत की शीघ्रता से गणना किस प्रकार कर सकते हैं? शब्दों और संख्याओं के अतिरिक्त हम कोष्ठिका में सूत्र भी लिख सकते हैं जो किसी पंक्ति या स्तंभ की कोष्ठिकाओं के योग या औसत की गणना करता है।

हम कोष्ठिका की पंक्तियों को Start:End जैसे व्यंजक से दर्शा सकते हैं जो पंक्ति की पहले तथा अंतिम कोष्ठिका को इंगित करता है। उदाहरण के लिए, नागेश के प्राप्तांक B3:G3 व्यंजक से दर्शाए जाते हैं जबकि गौरी के ओड़िया, तेलुगू और अंग्रेजी में प्राप्तांक B7:D7 व्यंजक से दर्शाए जाते हैं। हम स्तंभों को दर्शाने के लिए भी इसी तरह के व्यंजकों का प्रयोग कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, D2:D6 पहले पाँच विद्यार्थियों के अंग्रेजी के प्राप्तांकों को दर्शाता है।

इसके पश्चात हम किसी पंक्ति या स्तंभ के योग या औसत की गणना का सूत्र लिख सकते हैं। उदाहरण के लिए = **SUM(B3:G3)** नागेश के सभी विषयों के कुल प्राप्तांक की गणना करता है, जबकि = **AVERAGE(B7:D7)** गौरी के ओड़िया, तेलुगू और अंग्रेजी के प्राप्तांकों के औसत अंक की गणना करता है।

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	नाम	ओड़िया (R ₁)	तेलुगु (R ₂)	अंग्रेजी (R ₃)	गणित	सा. विज्ञान	विज्ञान	कुल
2	रत्ना	25	39	29	36	34	37	250×
3	नागेश	41	43	48	39	40	39	=SUM(B3:G3)
4	अश्विन	29	31	33	34	30	28	
5	फारूक	47	46	38	42	49	44	
6	मृणाल	33	35	28	32	30	36	
7	गौरी	27	29	34	31	32	30	
8	पंकज	16	19	22	17	18	20	

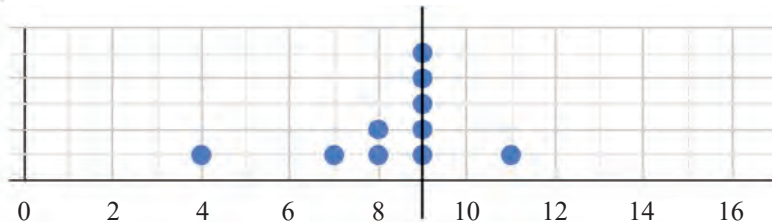
- ? विज्ञान विषय में कक्षा के औसत अंक ज्ञात करने के लिए आप कौन-सा सूत्र लिखेंगे?
- ? पता लगाइए कि क्या ओड़िया में कक्षा के औसत अंक, तेलुगु में औसत अंक से अधिक हैं?
- ? अंतिम पंक्ति के पश्चात उपयुक्त सूत्र लिखकर अन्य विषयों के औसत अंक दर्शाइए।
संगणक पर इनका अभ्यास कीजिए। आप सारणीबद्ध आँकड़े इस क्यूआर कोड से डाउनलोड कर सकते हैं।
- ? उपयुक्त सूत्र टाइप करके प्रत्येक विद्यार्थी के कुल प्राप्तांक ज्ञात कीजिए।



शिक्षक के लिए टिप्पणी— आप माइक्रोसॉफ्ट एक्सेल (Microsoft Excel), गूगल शीट्स (Google Sheets), लिब्रेऑफिस कैल्क (LibreOffice Calc) आदि जैसे किसी भी स्प्रेडशीट सॉफ्टवेयर का उपयोग कर सकते हैं। यदि प्रत्येक विद्यार्थी के लिए संगणक उपलब्ध नहीं हैं तो विद्यार्थी समूह में संगणक साझा कर सकते हैं। यदि यह संभव न हो तो संगणक के पटल को पूरी कक्षा के लिए प्रक्षेपक से दर्शाया जा सकता है। ऐसा उस स्थिति में हो जब एक ही संगणक उपलब्ध हो।

? आइए, पता लगाएँ

- निम्नलिखित आँकड़ों के माध्य ज्ञात कीजिए और प्राप्त अवलोकन को साझा कीजिए।
 - पहली 50 प्राकृत संख्याएँ
 - पहली 50 विषम संख्याएँ
 - 4 के पहले 50 गुणज
- नीचे दिए गए बिंदु आलेख में एक आँकड़ा संग्रह और उसका औसत दर्शाया गया है परंतु एक बिंदु लुप्त है। लुप्त मान को इस प्रकार चिह्नित कीजिए कि माध्य 9 हो जाए (नीचे दर्शाए अनुसार)।



3. शिक्षक सुधाकर ने श्रेयस को अपनी कक्षा के सभी 24 विद्यार्थियों की ऊँचाई मापने और औसत ऊँचाई की गणना करने के लिए कहा। श्रेयस ने शिक्षक को बताया कि औसत ऊँचाई 150.2 सेंटीमीटर है। शिक्षक का पता चला कि ऊँचाई मापते समय विद्यार्थियों ने विद्यालय के जूते पहने हुए थे और जूतों के कारण प्रत्येक विद्यार्थी की ऊँचाई में 1 सेंटीमीटर की वृद्धि हो गई।

(i) क्या शिक्षक को सही औसत ऊँचाई ज्ञात करने के लिए जूतों के बिना सभी विद्यार्थियों की ऊँचाइयों को पुनः मापन करवाना चाहिए? या कोई अन्य सरल विधि है?

(ii) कक्षा की सही औसत ऊँचाई क्या है?

(क) 174.2 cm

(ख) 126.2 cm

(ग) 150.2 cm

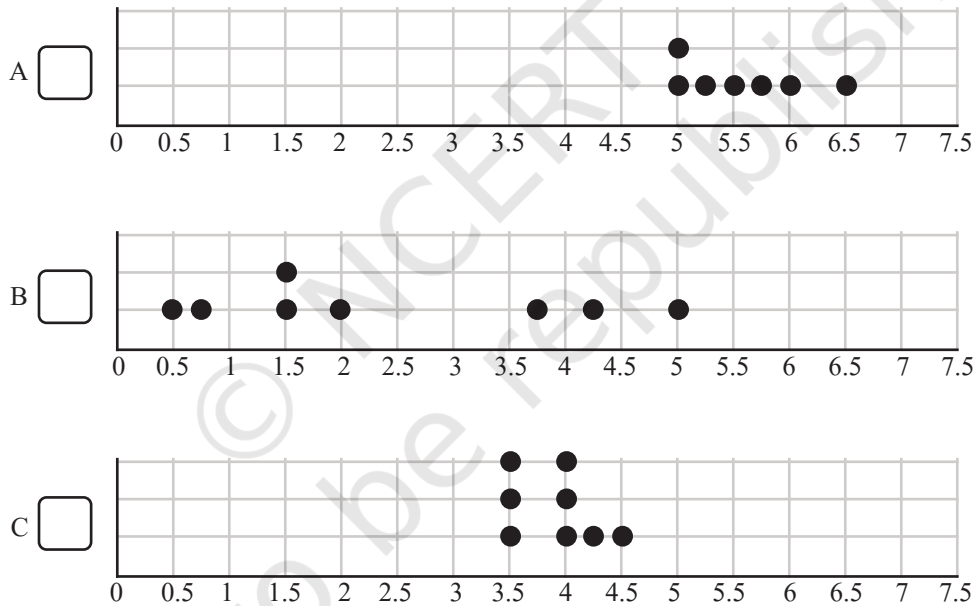
(घ) 149.2 cm

(ङ) 151.2 cm

(च) उपरोक्त में से कोई नहीं

(छ) अपर्याप्त सूचना

4. नीचे दिए गए तीन बिंदु आलेख विभिन्न एलबमों के गानों की लंबाई (मिनटों में) दर्शाते हैं। इनमें से किस एलबम के गानों की औसत लंबाई 5.57 मिनट है? समझाइए कि आपने यह उत्तर किस प्रकार प्राप्त किया?

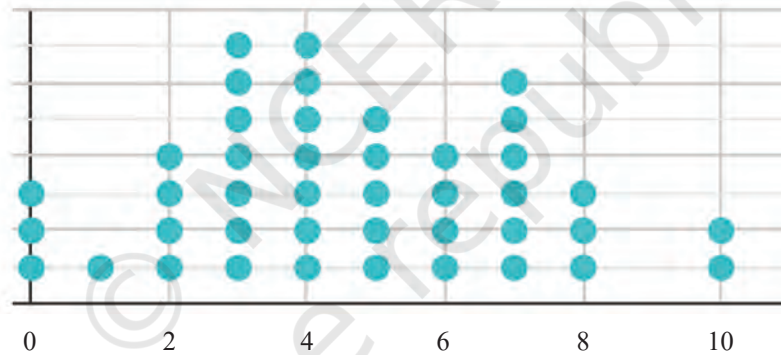


5. दिए गए आँकड़ों — 8, 10, 19, 23, 26, 34, 40, 41, 41, 48, 51, 55, 70, 84, 91, 92 की माध्यिका ज्ञात कीजिए।



- (i) यदि हम माध्यिका को प्रभावित किए बिना आँकड़ों में (दी गई सूची में) एक मान सम्मिलित करते हैं तो वह मान क्या हो सकता है?
- (ii) यदि हम माध्यिका को प्रभावित किए बिना आँकड़ों में दो मान सम्मिलित करते हैं तो वे दो मान क्या हो सकते हैं?
- (iii) यदि हम माध्यिका को प्रभावित किए बिना आँकड़ों से एक मान हटा दें तो वह मान क्या हो सकता है?

6. निम्नलिखित कथनों की जाँच कीजिए और सत्यापित कीजिए कि कथन सदैव सत्य है, कभी-कभी सत्य है या कभी सत्य नहीं है।
 - (i) माध्यिका से छोटा, एक मान हटाने से माध्यिका कम हो जाएगी।
 - (ii) माध्य से छोटा, एक मान सम्मिलित करने से माध्य कम हो जाएगा।
 - (iii) किन्हीं भी 4 मानों को सम्मिलित करने से माध्यिका पर कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा।
 - (iv) माध्यिका से छोटे 4 मानों को सम्मिलित करने से माध्यिका बढ़ जाएगी।
7. संख्याओं 8, 13, 10, 4, 5, 20, y , 10 का माध्य 10.375 है। y का मान ज्ञात कीजिए।
8. 15 मानों वाले आँकड़ों के एक संग्रह का माध्य 134 है। आँकड़ों का योग ज्ञात कीजिए।
9. दिए गए आँकड़ों— 12, 47, 8, 73, 18, 35, 39, 8, 29, 25, p पर विचार कीजिए। यदि इन आँकड़ों की माध्यिका 29 है तो निम्नलिखित में से कौन-सी संख्या p हो सकती है?
 - (i) 10 (ii) 25 (iii) 40 (iv) 100
 - (v) 29 (vi) 47 (vii) 30
10. एक सप्ताह में विद्यार्थियों द्वारा साइकिल चलाए जाने की संख्या नीचे दिए गए बिंदु आलेख में दर्शाई गई है। चार विद्यार्थियों ने उस सप्ताह में दो बार साइकिल चलाई।



- (i) विद्यार्थियों द्वारा कितनी बार साइकिल चलाई गई, इसका औसत ज्ञात कीजिए।
- (ii) विद्यार्थियों द्वारा कितनी बार साइकिल चलाई गई, इसकी माध्यिका ज्ञात कीजिए।
- (iii) निम्नलिखित में से कौन-से कथन मान्य हैं? और क्यों?
 - (a) सभी ने अपनी साइकिल कम से कम एक बार चलाई।
 - (b) लगभग सभी ने अपनी साइकिल कुछ बार चलाई।
 - (c) ऐसे कुछ विद्यार्थी हैं जिन्होंने किन्हीं दिनों में एक से अधिक बार साइकिल चलाई।
 - (d) ठीक 5 विद्यार्थियों ने किन्हीं दिनों में एक से अधिक बार अपनी साइकिल चलाई।

- (e) अगले सप्ताह में यदि उन सभी ने पिछले सप्ताह की तुलना में 1 अधिक बार साइकिल चलाई तो अगले सप्ताह के आँकड़ों का औसत और माध्यिका क्या होगी?

11. एक विद्यालय में शूल-फेंक (डार्ट-शोईंग) प्रतियोगिता आयोजित की गई थी। प्रतिभागियों द्वारा मछली की आँख (केंद्र-वृत्त के भीतर) पर सटीक लक्ष्य साधने के लिए प्रयासों की संख्या नीचे तालिका में दी गई हैं। आँकड़ों का न्यूनतम, अधिकतम, माध्य और माध्यिका ज्ञात कर आँकड़ों का वर्णन कीजिए।



प्रयासों की संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
विद्यार्थियों की संख्या	1	0	0	1	4	9	12	15	10	10

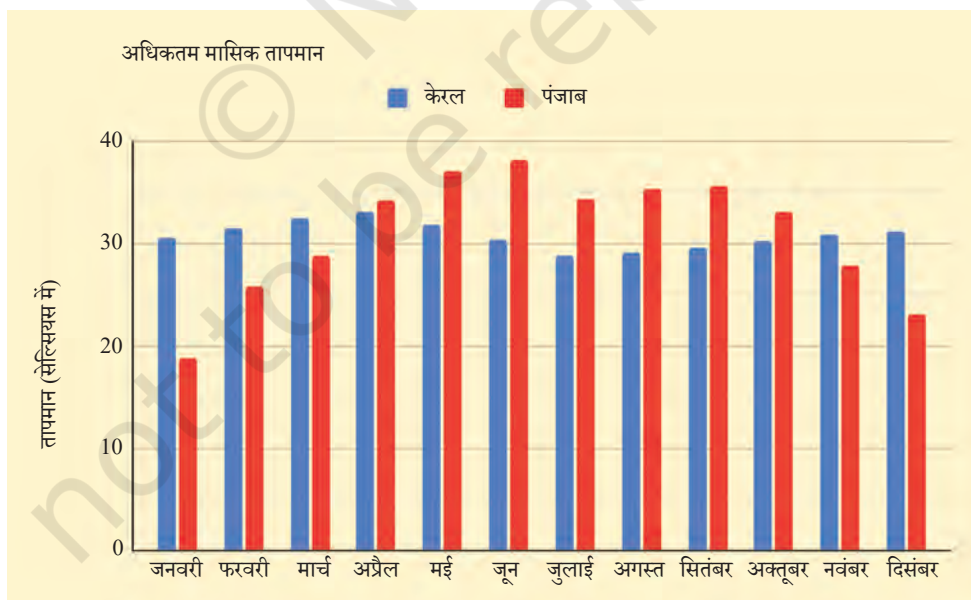
5.2 आँकड़ों का दृश्यांकन एवं व्याख्या

अब तक हमने चित्र आलेख, दंड आलेख, समूहित दंड आलेख तथा बिंदु आलेख को पढ़ना और बनाना सीख लिया है। अब हम आँकड़ों के दृश्यांकन की अन्य विधियाँ सीखेंगे।

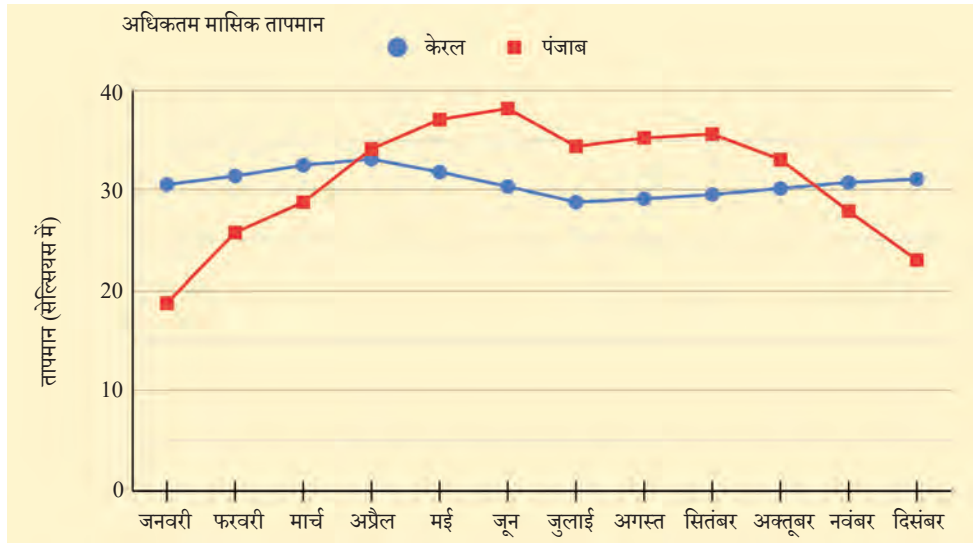
रेखा-आलेख

तापमान

नीचे एक समूहित स्तंभ आलेख दिया गया है जो 2023 में केरल और पंजाब के अधिकतम मासिक तापमान को दर्शाता है।



- ? अब अगले पृष्ठ पर दिए आलेख का अवलोकन कीजिए। क्या ये दोनों आलेख समान सूचनाएँ प्रदर्शित करते हैं?



रेखाओं से बने ऐसे आलेख को हम **रेखा आलेख** कहते हैं। रेखा आलेख सामान्यतः समय के साथ आँकड़ों में परिवर्तन के दृश्यांकन में प्रयोग किए जाते हैं।

? किसी राज्य में एक महीने की अवधि में मापा गया अधिकतम तापमान किस प्रकार प्राप्त किया जाता है?

संपूर्ण राज्य में कुछ मौसम केंद्र होते हैं जो नियमित रूप से स्थानीय तापमान का मापन करते हैं। हम संपूर्ण राज्य में रिकॉर्ड किए गए सभी तापमानों में से अधिकतम मान का अवलोकन करके अधिकतम मासिक तापमान को ज्ञात कर सकते हैं।



जब हम यह समझने का प्रयास करते हैं कि आँकड़े किस प्रकार एकत्र किए जाते या निर्मित किए जाते हैं तो हमें इसके विस्तार का स्पष्ट अनुमान लग जाता है। इसके साथ ही हम इसकी अधिक सार्थक रूप में व्याख्या कर सकते हैं। इससे हमें इसकी सीमाओं जैसे पक्षपात या अधूरी सूचना को पहचानने में भी सहायता प्राप्त होती है। साथ ही यह तय करने में भी सहायता मिलती है कि हम आँकड़ों से कितने विश्वसनीय रूप से निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

आइए, दर्शाई गई सूचनाओं को पहचानने और इसकी व्याख्या करने के लिए हम दो चरणों वाली प्रक्रिया का पालन करें।

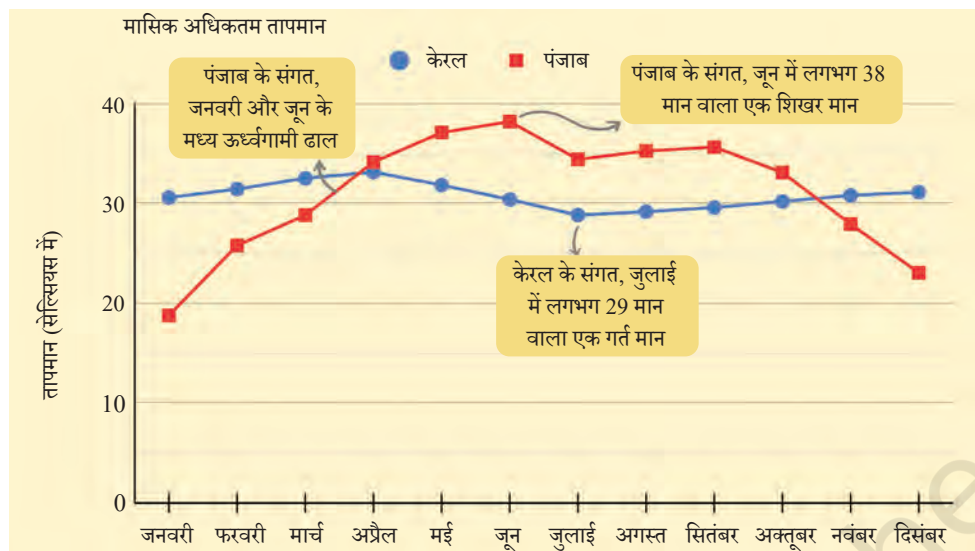
चरण— 1 दिए गए आँकड़ों को पहचानना

? ध्यान दीजिए कि आलेख को किस प्रकार व्यवस्थित किया गया है, किस पैमाने का उपयोग किया गया है और आँकड़े किस प्रतिरूप को दर्शाते हैं।

- एक शहर के प्रत्येक माह के आँकड़ों को चिह्नित किया गया है और समय के साथ हुए परिवर्तन को दर्शाने के लिए रेखाओं द्वारा जोड़ा गया है। केरल के आँकड़ों को नीले गोलों द्वारा नीली रेखाओं से जोड़कर दर्शाया गया है तथा पंजाब के आँकड़ों को लाल रंग से दर्शाया गया है।

विभिन्न आकार के चिह्नक सरलता से यह पहचानने में सहायता करते हैं कि क्या आलेख स्लेटी या श्वेत-श्याम में छपा हुआ है या उन लोगों के लिए जिन्हें रंगों में अंतर करने में कठिनाई होती है।

- क्षैतिज रेखा वर्ष के महीनों को दर्शाती है। ऊर्ध्वाधर रेखा डिग्री सेल्सियस ($^{\circ}\text{C}$) में तापमान को दर्शाती है।



चरण— 2 दिए गए आँकड़ों से निष्कर्ष निकालना और व्याख्या करना

? आपके द्वारा किए गए प्रत्येक अवलोकन का विश्लेषण और व्याख्या कीजिए। उपयुक्त सारांश या निष्कर्ष कथन साझा कीजिए।

- पंजाब में जनवरी से जून तक अधिकतम मासिक तापमान बढ़ता है और 38° सेल्सियस तक पहुँच जाता है। इसके पश्चात जुलाई में यह घटकर 35° सेल्सियस से थोड़ा कम हो जाता है। सितंबर तक यह लगभग स्थिर रहता है और दिसंबर तक लगातार घटता रहता है जो लगभग 23° सेल्सियस तक पहुँच जाता है। जनवरी में अधिकतम मासिक तापमान सभी अधिकतम मासिक तापमानों में सबसे कम, लगभग 19° सेल्सियस रहता है।
- केरल की स्थिति भिन्न है। यहाँ तापमान लगभग पूरे वर्ष स्थिर रहता है। यहाँ अप्रैल में वार्षिक अधिकतम मान लगभग 33° सेल्सियस तथा जुलाई में वार्षिक न्यूनतम तापमान लगभग 29° सेल्सियस तक रहता है। ध्यान दीजिए कि केरल में ग्रीष्मकाल और शीतकाल दोनों में मासिक अधिकतम तापमान लगभग समान रहता है!
- संक्षेप में पंजाब के तापमान में केरल की तुलना में अधिक उतार-चढ़ाव होता है, यहाँ तापमान अधिक गर्म व अधिक ठंडे बिंदु तक पहुँचता है।



इससे कई प्रकार के प्रश्न उठ सकते हैं जिनमें से कुछ के उत्तर आँकड़ों की सहायता से दिए जा सकते हैं। आगे विचारणीय कुछ प्रश्न दिए गए हैं—

- इन दोनों राज्यों के तापमान के रुझान में इतनी भिन्नता क्यों है? किसी क्षेत्र के तापमान को निर्धारित करने वाले कारक कौन-से हैं?

- संभवतः आप कुछ अन्य राज्यों के तापमान के रुझान जानने के लिए उत्सुक होंगे। क्या इन राज्यों में अन्य प्रकार के तापमान रुझान भी देखने को मिलते हैं?
- पंजाब के समान तापमान रुझान किन राज्यों में देखने को मिलते हैं? क्या इन राज्यों में कोई समानता है?
- इन राज्यों के न्यूनतम मासिक तापमान का आलेख कैसा दिखेगा?

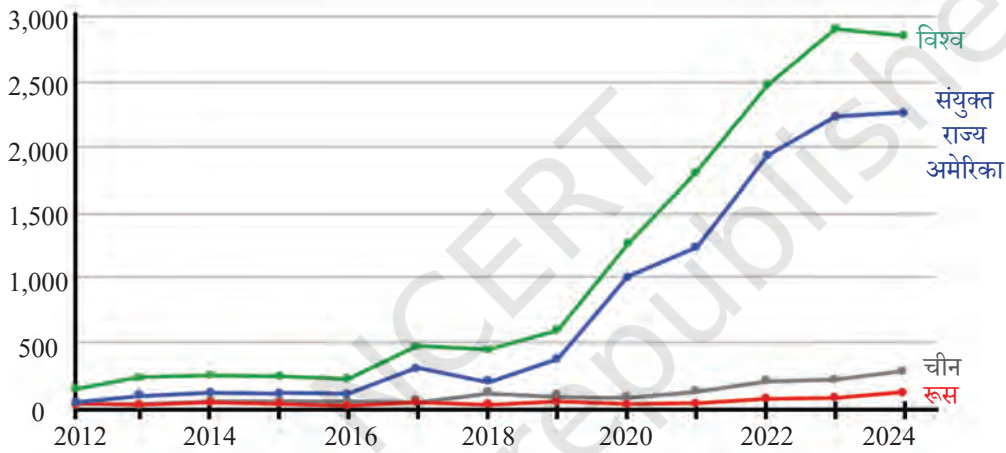


? आपके मन में क्या विचार या प्रश्न उत्पन्न हो रहे हैं?

अंतरिक्ष जाम— भविष्य की एक यातायात समस्या?

नीचे दिए गए रेखा आलेख को देखिए जो प्रतिवर्ष अंतरिक्ष में प्रक्षेपित यानों की संख्या को दर्शाता है।

अंतरिक्ष में प्रक्षेपित की जाने वाली वस्तुओं की वार्षिक संख्या, जिनमें सैटेलाइट, प्रॉब, लैंडर, मानवयुक्त अंतरिक्षयान और अंतरिक्ष स्टेशन उड़ान घटक हैं, जो पृथ्वी की कक्षा में या उससे परे प्रक्षेपित किए गए हैं।



स्रोत— बाह्य अंतरिक्ष मामलों के लिए संयुक्त राष्ट्र कार्यालय (2025)

? ये आँकड़े किस विधि से संकलित किए गए होंगे? चर्चा कीजिए।

चरण 1— दिए गए आँकड़ों को पहचानना

? आलेख की संरचना, प्रयोग किए गए पैमाने और आँकड़ों द्वारा दर्शाए गए प्रतिरूप पर ध्यान दीजिए।

चरण 2— दिए गए आँकड़ों से निष्कर्ष निकालना और व्याख्या करना

? आपने जो भी अवलोकन किए हैं, उनका विश्लेषण और व्याख्या कीजिए। सभी व्याख्याएँ हो जाने के पश्चात सारांश या निष्कर्ष कथन दिए जा सकते हैं।

- वर्ष 2024 में वैश्विक स्तर पर इनकी संख्या लगभग 2800 है जबकि वर्ष 2023 में यह लगभग 2900 थी। हम कह सकते हैं कि वर्ष 2023 में वैश्विक स्तर पर अंतरिक्ष में प्रक्षेपित यानों की संख्या सबसे अधिक रही (यह मानते हुए कि 2012 से पहले रुझान घट रहा था)।
- तीनों देशों की कुल प्रक्षेपण संख्या वैश्विक प्रक्षेपण संख्या के समान नहीं है। अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि इस दृश्यांकन में अन्य देशों की प्रक्षेपण संख्या नहीं दर्शाई गई है।



- संयुक्त राज्य अमेरिका के लिए वर्ष 2022 से वर्ष 2023 तक की वृद्धि 2023 से 2024 तक की वृद्धि से अधिक है। रेखाखंड की ढलान को देखकर हम ऐसा कह सकते हैं कि रेखा की ढलान जितनी अधिक होगी, वृद्धि उतनी ही अधिक होगी।

❓ निम्नलिखित में से कौन-से कथन वैध निष्कर्ष हैं?

- वर्ष 2012 से वर्ष 2024 तक अंतरिक्ष में भेजे गए यानों की वैश्विक संख्या में प्रतिवर्ष वृद्धि हुई।
- वर्ष 2022-24 तक के वर्षों में संयुक्त राज्य अमेरिका एक प्रमुख योगदानकर्ता है जो वैश्विक प्रक्षेपण संख्या का लगभग $\frac{3}{4}$ भाग प्रक्षेपण करता है।
- नेपाल ने वर्ष 2012-24 की अवधि में कोई भी यान प्रक्षेपित नहीं किया।
- वर्ष 2024 में चीन और रूस द्वारा संयुक्त रूप से लगभग 400 यान प्रक्षेपित किए गए हैं।

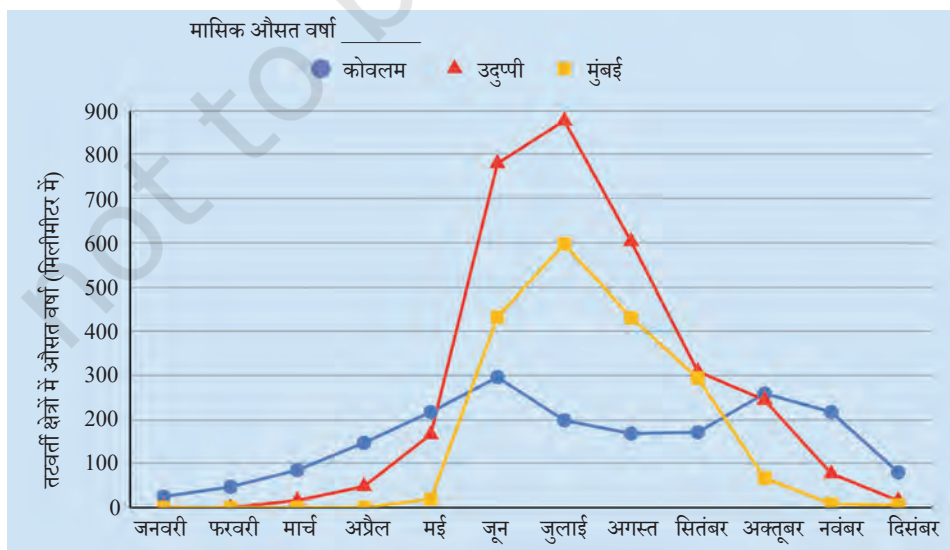
❓ ऐसे दो क्रमागत वर्षों की पहचान कीजिए जिनमें वैश्विक संख्या में 2 गुना या उससे अधिक की वृद्धि हुई हो।

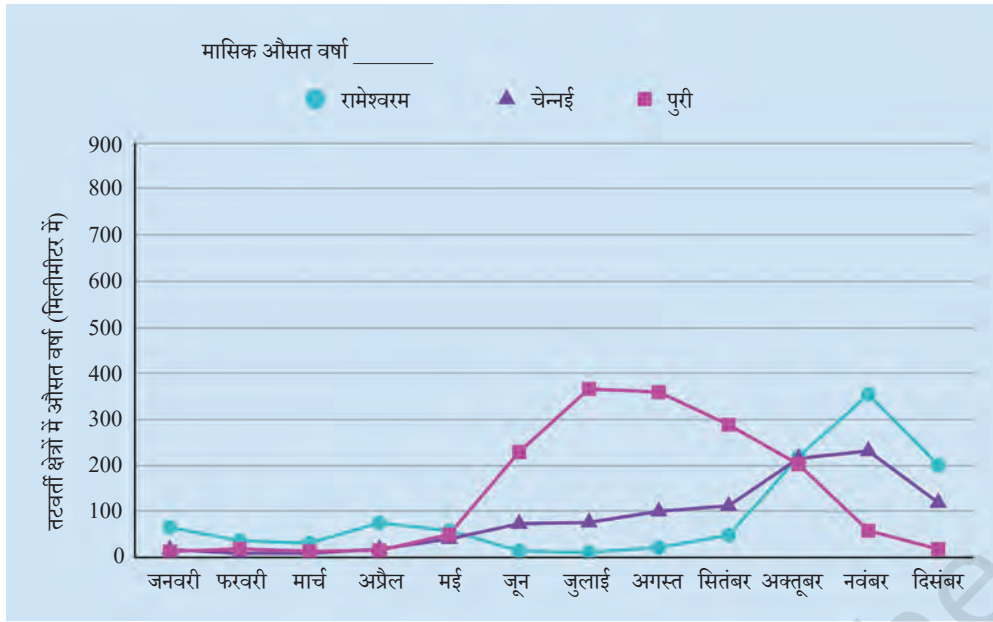
कल्पना कीजिए कि यही आँकड़े समूहित स्तंभ आलेख के रूप में दर्शाए जाएँ तो इसमें प्रत्येक वर्ष में एक समूह के साथ कुल 13 समूह होंगे और प्रत्येक समूह में 4 स्तंभ, कुल मिलाकर 52 स्तंभ (दंड) बनेंगे! ऐसा आलेख अधिक भरा हुआ दिखेगा और पढ़ने में कठिन लगेगा जिससे आँकड़ों के रुझान को स्पष्ट रूप से समझना कठिन हो जाएगा।

दूसरी ओर, रेखा आलेख समय के साथ होने वाले परिवर्तनों को दर्शाने के लिए अधिक उपयुक्त है। इसमें आँकड़ा बिंदुओं को रेखाखंडों द्वारा जोड़ा जाता है। यह रुझानों और परिवर्तनों का स्पष्ट दृष्ट्यांकन करता है जिससे पाठक सरलता से यह जाँच कर सकता है कि कोई प्राचल (parameter) विभिन्न वर्षों में कैसे बढ़ा है।

वर्षा के प्रतिरूप खोजिए

नीचे दिए गए आलेख कुछ शहरों के मासिक औसत वर्षा के आँकड़े दर्शाते हैं।





स्रोत— weather-and-climate.com

? ये आँकड़े किस विधि से संकलित किए गए होंगे?

ये आँकड़े 6 शहरों में मासिक औसत वर्षा को दर्शाते हैं। इसका अर्थ है कि प्रत्येक शहर में कुछ वर्षों तक वर्षा के आँकड़े एकत्र किए गए हैं। किसी शहर के किसी माह में, मान लीजिए जून में औसत वर्षा ज्ञात करने के लिए विगत कई वर्षों में जून माह के समय हुई वर्षा का औसत निकाला गया है।

? भारत के मानचित्र पर इन शहरों को चिह्नित कीजिए। आलेख में इन्हें जिस प्रकार से समूहित किया गया है, उसमें क्या समानता है? आलेख के संदर्भ में अपने अवलोकन और निष्कर्ष को साझा कीजिए।



कोवलम, उदुप्पी और मुंबई शहर पश्चिमी तट पर स्थित हैं। रामेश्वरम, चेन्नई और पुरी शहर पूर्वी तट पर स्थित हैं। ऐसा प्रतीत होता है कि पश्चिमी तट के क्षेत्रों में अधिक वर्षा होती है।

? प्रत्येक शहर में अधिकतम मासिक वर्षा और न्यूनतम मासिक वर्षा वाले महीनों की पहचान कीजिए।

उदुप्पी, मुंबई और कोवलम में जून से अगस्त तक सबसे अधिक वर्षा होती है। रामेश्वरम में अक्टूबर से दिसंबर तक सबसे अधिक वर्षा होती है। चेन्नई में जुलाई से वर्षा होना प्रारंभ हो जाती है जो नवंबर में चरम पर पहुँचती है और दिसंबर तक जारी रहती है। पूर्वी तट पर स्थित होते हुए भी पुरी में जुलाई से सितंबर तक की अवधि में सबसे अधिक वर्षा होती है। इन सभी शहरों में जनवरी से मार्च तक शुष्क मास होते हैं तथा इस अवधि में इनमें कम वर्षा होती है। रामेश्वरम में जनवरी से सितंबर तक बहुत कम वर्षा होती है।

? दक्षिण-पश्चिम मानसून और उत्तर-पूर्व मानसून के विषय में पढ़िए और ध्यान दीजिए कि कौन-से क्षेत्र इनके प्रभाव में आते हैं और कब?

? आइए, पता लगाएँ

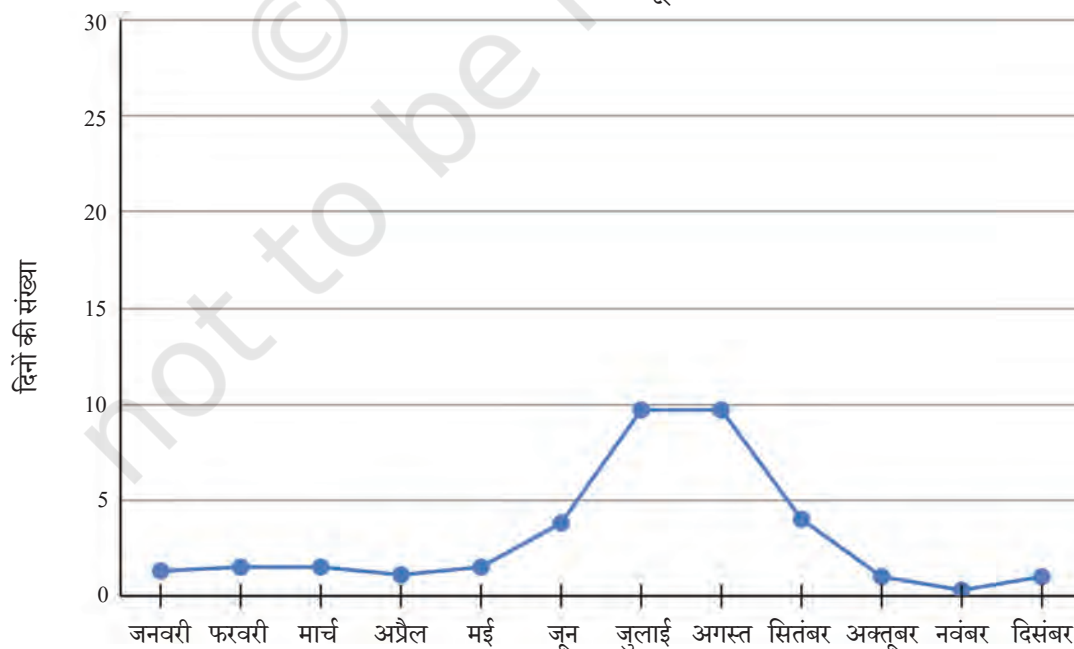
- सप्ताह के विभिन्न दिवसों में किसी दुकान पर आने वाले ग्राहकों की औसत संख्या और वास्तव में सामान क्रय करने वाले ग्राहकों की औसत संख्या नीचे दी गई तालिका में दर्शाई गई है। इन आँकड़ों को एक रेखा आलेख पर दर्शाइए।

	सोम	मंगल	बुध	वृहस्पति	शुक्र	शनि	रवि
आगतुक्त ग्राहक	16	19	10	14	20	22	35
क्रेता ग्राहक	10	8	7	11	12	16	26

- कुछ शहरों में प्रत्येक माह में वर्षा के दिनों की औसत संख्या नीचे दी गई तालिका में दर्शाई गई है—

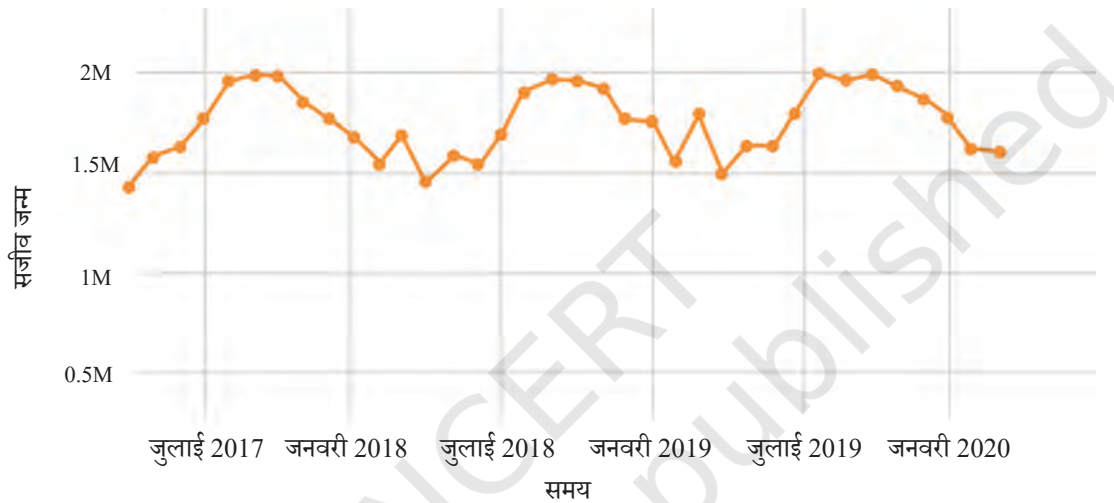
	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितंबर	अक्टूबर	नवंबर	दिसंबर
मेंगलुरु	0.1	0	0.1	1.8	6.2	24.1	27.7	24.5	14	8.8	3.9	0.9
नई दिल्ली												
पोर्ट ब्लेयर	2.4	1.3	0.9	3.3	15.5	18.7	17.3	18.8	16.8	14.1	11.3	5.4
रामेश्वरम	2.6	1.3	1.9	3.4	2.5	0.4	1	1	1.9	8.1	10.4	7.8

- ये आँकड़े किस विधि से संकलित किए गए होंगे?
- नीचे दिए गए रेखा आलेख में मेंगलुरु, पोर्ट ब्लेयर और रामेश्वरम के आँकड़ों को अंकित कीजिए। आप मानों का सन्निकटन निकटतम पूर्णांक तक कर सकते हैं।



स्रोत— weather-and-climate.com

- (iii) आलेख में नई दिल्ली के लिए दर्शाई गई रेखा के आधार पर तालिका में आँकड़ों की पूर्ति कीजिए।
 - (iv) इनमें से किस शहर में प्रति वर्ष सबसे अधिक वर्षा के दिन होते हैं? किस शहर में प्रति वर्ष सबसे कम वर्षा के दिन होते हैं?
 - (v) तालिका को देखकर बताइए कि नई दिल्ली और रामेश्वरम में वर्षा ऋतु किन महीनों में है?
3. नीचे दिया गया रेखा आलेख भारत में एक निश्चित समयावधि में प्रति माह की जन्म संख्या को दर्शाता है—

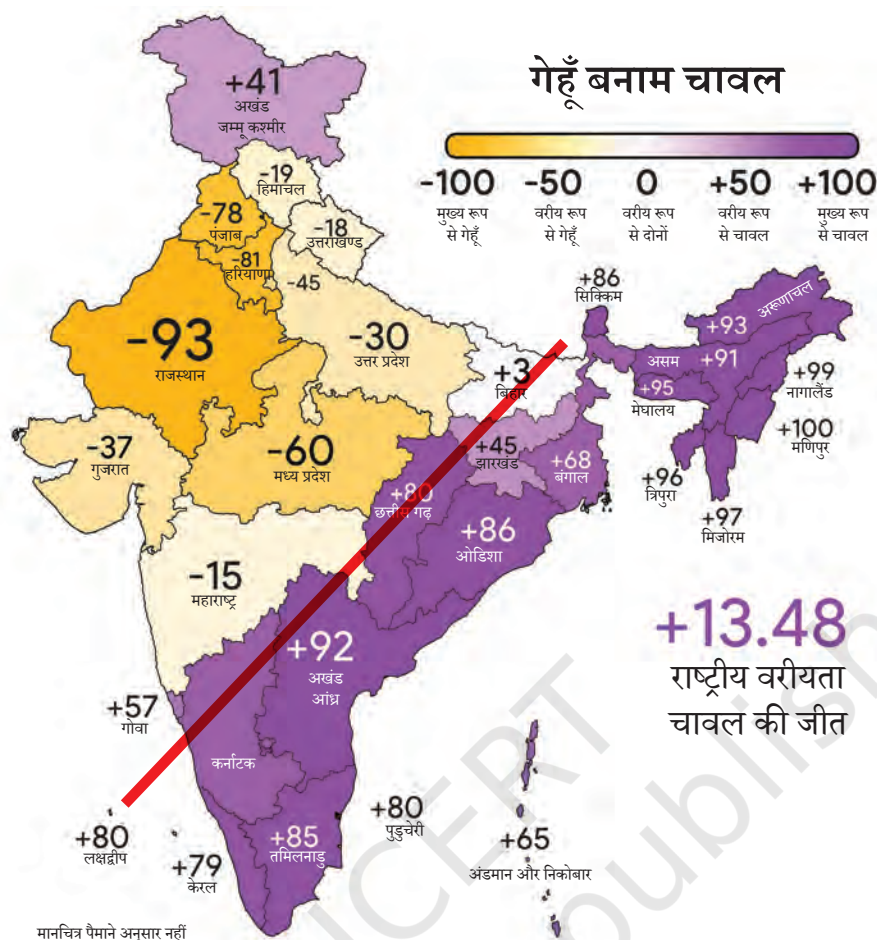


स्रोत—Nambiar et al (Forthcoming) - "Seasonal variations in births in India"

- (i) आपके अवलोकन क्या हैं?
- (ii) जुलाई 2017 में लगभग कितने बच्चों का जन्म हुआ?
- (iii) आलेख किस समयावधि को दर्शाता है?
- (iv) वर्ष 2018, 2019 और 2020 के जनवरी माह में हुए जन्म की संख्या की तुलना कीजिए।
- (v) वर्ष 2019 में जन्म संख्या का आकलन कीजिए।

सूचनालेख

कक्षा 6 में हमने एक उदाहरण देखा था कि किस प्रकार सूचनालेख (इन्फोग्राफिक्स) का प्रयोग सूचना और अंतर्दृष्टि को अधिक स्पष्ट, त्वरित रूप से तथा आकर्षक दृश्यांकन से समझाने के लिए किया जा सकता है। अग्रिम दिए गए सूचनालेख को देखिए। क्या आप इसमें दी गई सूचना को समझ पा रहे हैं?



यह सूचनालेख (इन्फोग्राफिक्स) विभिन्न राज्यों में चावल और गेहूँ के मध्य वरीयता की तुलना करता है। ऊपरी दाएँ कोने में दिया गया रंग पैमाना यह दर्शाता है कि वरीयता के लिए विभिन्न रंग किस प्रकार प्रयोग किए जाएंगे।

मानचित्र में चावल और गेहूँ के प्रति व्यक्ति उपभोग के अंतर को -100 और +100 के मध्य के मानों से दर्शाया गया है। +100 का मान यह नहीं दर्शाता कि राज्य में गेहूँ का बिल्कुल भी उपभोग नहीं होता है। इसका अर्थ यह है कि इस राज्य में मुख्य रूप से चावल को वरीयता दी जाती है और प्रति व्यक्ति चावल और गेहूँ के उपभोग में अंतर सबसे अधिक है। क्या यह रोचक नहीं है कि लाल रेखा द्वारा चावल बनाम गेहूँ की वरीयता में स्पष्ट भौगोलिक विभाजन दर्शाया गया है?

? अपने अवलोकन साझा कीजिए। इस सूचनालेख के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

- कर्नाटक का मान छिपा हुआ है। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि यह मान क्या हो सकता है?
- वे 5 शीर्ष राज्य कौन-से हैं जहाँ चावल सबसे अधिक लोकप्रिय है?
- वे 5 शीर्ष राज्य कौन-से हैं जहाँ गेहूँ सबसे अधिक लोकप्रिय है?
- कुछ ऐसे राज्यों की सूची बनाइए जहाँ चावल और गेहूँ के मध्य वरीयता लगभग संतुलित है।



पट्टिका क्या बता सकती है?

मनोज की एक रोचक अभिरुचि है। वह दिन भर में जो कुछ भी करता है, उसे लिखता है। वह आधी रात से लेकर अगली आधी रात तक 30-30 मिनट के अंतराल पर समय अंकित करते हुए कागज की एक पट्टिका पर 48 बक्सों में रंग भरकर अपनी गतिविधियों को अंकित करता है।

उसने सप्ताह के तीन भिन्न-भिन्न दिवसों के लिए पाँच प्रकार की गतिविधियों को तीन रंगीन पट्टिकाओं पर अंकित किया है, जो दाईं ओर दर्शाई गई हैं।

- (i) निद्रा
- (ii) भोजन करना
- (iii) मित्रों से मिलना, रुचि, मीडिया, परिवार के साथ समय व्यतीत करना
- (iv) कक्षा में उपस्थित होना, अध्ययन करना और गृहकार्य करना
- (v) स्नान करना और वस्त्र पहनना, योग या व्यायाम
- (vi) यात्रा करना

? तीन रंगीन पट्टिकाओं को सावधानीपूर्वक देखिए।

- (i) प्रत्येक रंग किस गतिविधि को दर्शाता है?
- (ii) तीनों पट्टिकाएँ शुक्रवार से रविवार तक के दिनों को किसी क्रम में दर्शाती हैं। आपके अनुसार प्रत्येक पट्टिका किस दिन को दर्शाती है?
- (iii) इन्हीं दिनों में से किसी एक दिन वह मित्रों के साथ एक लंबी अवधि की सिनेमा देखने गया। आपके विचार से यह कब हुआ होगा?
- (iv) उसके विद्यालय में भोजन अवकाश किस समय होता है?
- (v) ये पट्टिकाएँ हमें और क्या बता सकती हैं?



- ❓ कार्य सप्ताह के किसी दिन के लिए आपकी पड़िका किस प्रकार की होगी? यह मनोज की पड़िका से कितनी समान या कितनी भिन्न होगी?
- ❓ अवकाश के एक सामान्य दिन के लिए आपकी पड़िका कैसी होगी? यह मनोज से कितनी समान या कितनी भिन्न होगी?
- ❓ आपके परिवार के किसी भी वयस्क के लिए यह पड़िका कैसी होगी? घर के किसी भी वयस्क के लिए एक दिन की पड़िका बनाइए। अपनी पड़िका की तुलना उनकी पड़िका से कीजिए। आपको इसमें क्या रोचक लगा?

प्रयास
कीजिए

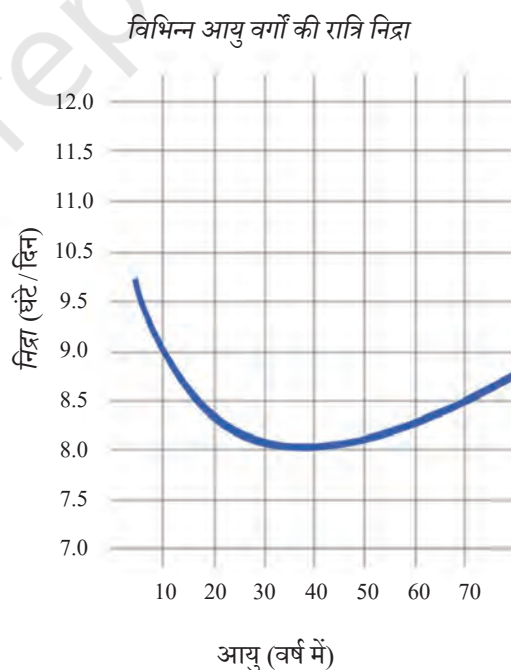
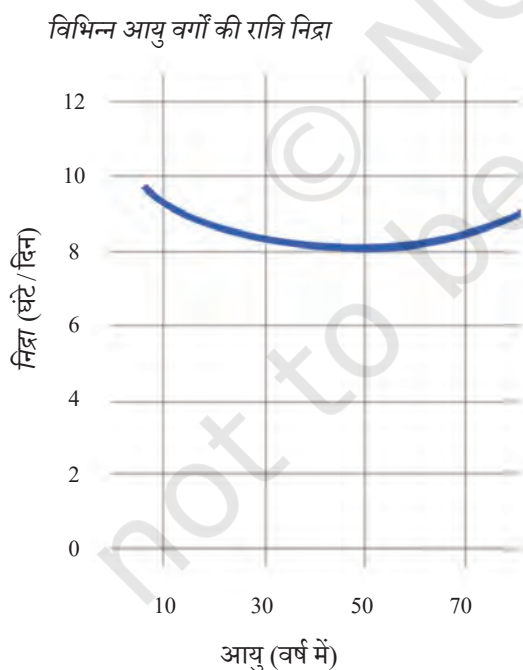
गणित
चर्चा

आँकड़ों की कहानी— गहरी निद्रा

क्या आपको समानुपातिक तर्कण अध्याय से निद्रा के समय का वृत्तालेख स्मरण है?

क्या यह रोचक नहीं है कि कुछ पशु प्रतिदिन में मात्र 2 घंटे सोते हैं और कुछ 20 घंटे तक सोते हैं? कीटों के संबंध में आपका क्या विचार है— क्या आपने कभी किसी कीट को सोते या विश्राम करते देखा है? मनुष्य सामान्यतः दिन में लगभग 7–9 घंटे सोते हैं। निद्रा की अवधि लोगों में बहुत भिन्न हो सकती है। मनुष्य को कितनी निद्रा की आवश्यकता होती है, यह आयु, रहन-सहन, जीवनशैली (उनके द्वारा ग्रहण किए जाने वाला भोजन, उनकी गतिविधियाँ आदि) और अन्य कारकों पर निर्भर करता है। संभवतः आपने ध्यान दिया होगा कि बच्चे वयस्कों से अधिक सोते हैं।

नीचे दिए गए रेखा आलेखों में 6 से 75 वर्ष की आयु के भारतीयों की औसत निद्रा की अवधि दर्शाई गई है। दूसरा आलेख, पहले आलेख का ही वर्धित आलेख है।



स्रोत— राष्ट्रीय समय उपयोग सर्वेक्षण 2024

? दिए गए इस आलेख पर अपने अवलोकन को साझा कीजिए। आपको इसमें क्या रोचक लगा?

पूर्व में दिए गए आलेख कुछ रेखाखंडों को मिलाने से बने होते थे, इसके विपरीत यह रेखा आलेख एक वक्र की भाँति दिखता है क्योंकि इसमें 80 आँकड़ा-बिंदु हैं जो एक-दूसरे के अति निकट स्थित हैं। इन्हीं आँकड़ों को स्तंभ आलेख के रूप में दर्शाने के लिए 70 स्तंभों की आवश्यकता होगी जिससे आलेख अव्यवस्थित और अधिक भरा हुआ दिखेगा। यहाँ रेखा आलेख एक अच्छा विकल्प है। यह स्पष्ट है और प्रतिरूप को सही प्रकार से दर्शाता है।

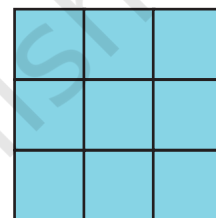
आलेख से ज्ञात होता है कि 6 वर्ष के बच्चों की प्रतिदिन औसत निद्रा समयावधि लगभग 9.5 घंटे है। किशोरावस्था से वयस्कता में प्रवेश करते ही निद्रा समयावधि घटने लगती है और 30 से 50 वर्ष की आयु के मध्य लगभग 8 घंटे प्रतिदिन तक पहुँच जाती है। 50 वर्ष की आयु के पश्चात, निद्रा समयावधि बढ़कर लगभग 8.5 घंटे हो जाती है।

आपको आश्चर्य हो सकता है कि नवजात शिशु और छोटे बच्चे इतने लंबे समय के लिए क्यों सोते हैं? क्या भिन्न-भिन्न देशों के लोग भिन्न-भिन्न अवधि के लिए सोते हैं? क्या पशुओं में भी आयु के साथ निद्रा की अवधि में ऐसे ही प्रतिरूप देखने को मिलते हैं?

? आइए, पता लगाएँ

1. माध्य ग्रिड (जाली) —

(i) दिए गए ग्रिड को 9 भिन्न-भिन्न संख्याओं से इस प्रकार पूरित कीजिए जिससे प्रत्येक पंक्ति, स्तंभ और विकर्ण का औसत 10 हो।



(ii) क्या हम कुछ संख्याओं को परिवर्तित कर ग्रिड को पूरित कर सकते हैं और तब भी पंक्ति, स्तंभ और विकर्ण का औसत 10 प्राप्त कर सकते हैं?

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक प्रतिबंध को संतुष्ट करने वाले आँकड़ों के दो उदाहरण दीजिए।

(i) 3 संख्याएँ जिनका माध्य 8 है।

(ii) 4 संख्याएँ जिनकी माध्यिका 15.5 है।

(iii) 5 संख्याएँ जिनके लिए, माध्य 13.6 है।

(iv) 6 संख्याएँ जिनके लिए, माध्य = माध्यिका है।

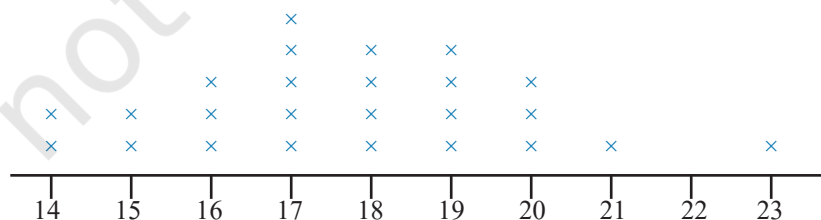
(v) 6 संख्याएँ जिनका माध्य > माध्यिका है।

3. 5, 21, 14, _____, _____, _____ रिक्त स्थानों की पूर्ति इस प्रकार कीजिए कि संग्रह की माध्यिका 13 हो। यदि आप केवल गणन संख्याएँ ही ले सकते हों तो ऐसे कितने संख्या समूह संभव हैं?

4. 3, 11, _____, _____, 15, 6 में रिक्त स्थानों की पूर्ति इस प्रकार कीजिए कि संग्रह का माध्य 6.5 हो। यदि आप केवल गणन संख्याएँ ही ले सकते हों तो ऐसे कितने संख्या युग्म संभव हैं?

5. अग्रलिखित प्रत्येक कथन की सत्यता की जाँच कीजिए। अपने तर्क को सिद्ध कीजिए। सिद्ध करने के लिए आवश्यकता के अनुसार बीजगणित का प्रयोग कीजिए।

- (i) दो सम संख्याओं का औसत सम होता है।
 (ii) 5 के किन्हीं दो गुणजों का औसत 5 का गुणज होगा।
 (iii) 5 के किन्हीं 5 गुणजों का औसत भी 5 का गुणज होगा।
6. सुधाकर की कक्षा में औसत ऊँचाई 150.2 सेंटीमीटर प्राप्त की गई। कुछ ही दिनों के पश्चात कक्षा में दो नए विद्यार्थियों का प्रवेश हुआ।
- (i) निम्नलिखित में से कौन-से कथन सही हैं? क्यों?
- (a) कक्षा की औसत ऊँचाई में वृद्धि होगी क्योंकि 2 नए मान सम्मिलित हुए हैं।
 (b) कक्षा की औसत ऊँचाई समान रहेगी।
 (c) नए विद्यार्थियों की ऊँचाई मापकर नई औसत ऊँचाई ज्ञात करनी होगी।
 (d) कक्षा में सभी विद्यार्थियों की ऊँचाई को पुनः मापकर नई औसत ऊँचाई की गणना करनी होगी।
- (ii) कक्षा में प्रवेश लेने वाले नए विद्यार्थियों की ऊँचाई 149 सेंटीमीटर और 152 सेंटीमीटर है। कक्षा की औसत ऊँचाई के संबंध में निम्नलिखित में से कौन-से कथन सही हैं? और क्यों?
- (a) औसत अपरिवर्तित रहेगा।
 (b) औसत में वृद्धि होगी।
 (c) औसत में कमी होगी।
 (d) दी गई सूचना औसत के संबंध में निष्कर्ष निकालने के लिए पर्याप्त नहीं है।
- (iii) कक्षा की नई माध्यिका ऊँचाई के संबंध में निम्नलिखित में से कौन-से कथन सही हैं? और क्यों?
- (a) माध्यिका अपरिवर्तित रहेगी।
 (b) माध्यिका में वृद्धि होगी।
 (c) माध्यिका में कमी होगी।
 (d) दी गई सूचना माध्यिका के संबंध में निष्कर्ष निकालने के लिए पर्याप्त नहीं है।
7. क्या नीचे दिए गए बिंदु आलेख में दर्शाए गए आँकड़ों का औसत 17 है? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए आपने जिस विधि का प्रयोग किया, उसे साझा कीजिए।



8. एक समूह के व्यक्तियों का भार प्रत्येक माह मापा गया। गत माह का औसत भार 65.3 किलोग्राम और माध्यिका भार 67 किलोग्राम था। इस माह के आँकड़े दर्शाते

हैं कि एक व्यक्ति के भार में 2 किलोग्राम की कमी हुई है और दो व्यक्तियों के भार में 1-1 किलोग्राम की वृद्धि हुई है। इस माह के औसत भार और माध्यिका भार में हुए परिवर्तन के संबंध में हम क्या कह सकते हैं?

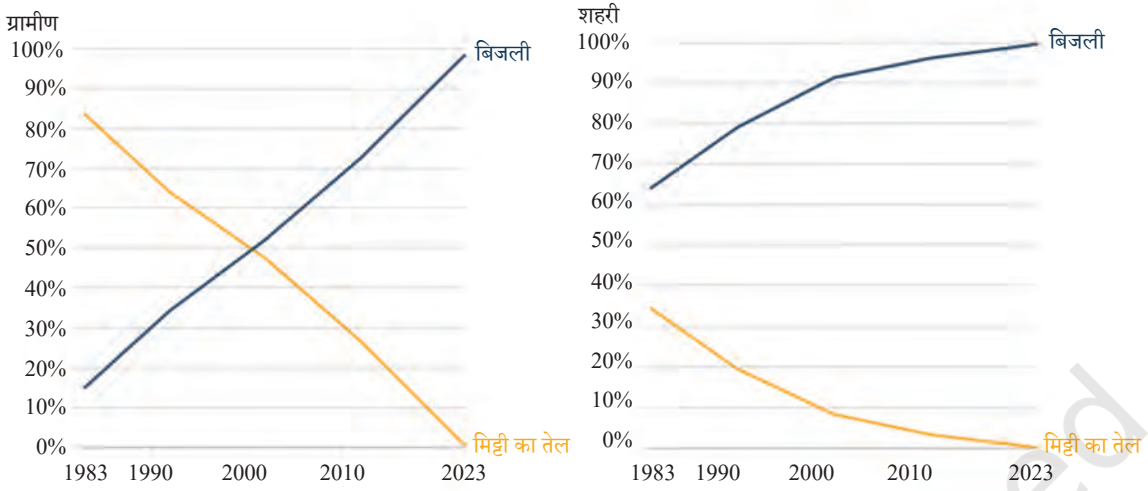
9. नीचे दी गई तालिका में कुछ राज्यों में 10 वर्षों की अवधि में जनवरी माह में आयोडीन युक्त नमक का खुदरा मूल्य (₹ में) दर्शाया गया है। गणना करने और आलेख बनाने के लिए आप मूल्यों का निकटतम पूर्ण संख्या तक सन्निकटन कर सकते हैं।

	अंडमान और निकोबार द्वीप समूह	असम	गुजरात	मिजोरम	उत्तर प्रदेश	पश्चिम बंगाल
2016	16	6	16.5	20	16.15	9.47
2017	12	12	14.75	20	16.97	11.65
2018	12	12	14.75	22	16.18	11.63
2019	12	12	14.75	22	18.24	11.43
2020	13.88	12	13	20	18.96	11.11
2021	18.22	15	14.45	22	20.63	12.79
2022	18.73	14	14.28	25	21.3	16.14
2023	20.63	12.02	14.54	27.65	25.39	18.43
2024	19.73	13.72	14.8	29.03	26.9	21.66
2025	20.99	12.35	19.2	29.8	24.81	23.99

- अपनी रुचि के अनुसार किन्हीं 3 राज्यों से आँकड़ों का चयन कीजिए और उन्हें उपयुक्त पैमाने का प्रयोग करते हुए रेखा आलेख के माध्यम से प्रस्तुत कीजिए।
- आपको इन आँकड़ों में क्या रोचक लगा? अपने अवलोकन साझा कीजिए।
- गुजरात और उत्तर प्रदेश में खुदरा मूल्य में अंतर की तुलना कीजिए।
- 2016 से 2025 तक किस राज्य में मूल्य में सबसे अधिक वृद्धि हुई है?
- आप अन्य किन निष्कर्षों को ज्ञात करने के लिए उत्सुक हैं?

10. नीचे दिए गए आलेख के संदर्भ में निम्नलिखित में से कौन-से कथन वैध हैं? और क्यों?

समय के साथ घरेलू प्रकाश के लिए ऊर्जा का प्राथमिक स्रोत



आँकड़े घरों में प्रकाश के लिए उपयोग किए जाने वाले मुख्य ऊर्जा स्रोत की भागीदारी प्रदर्शित करते हैं।

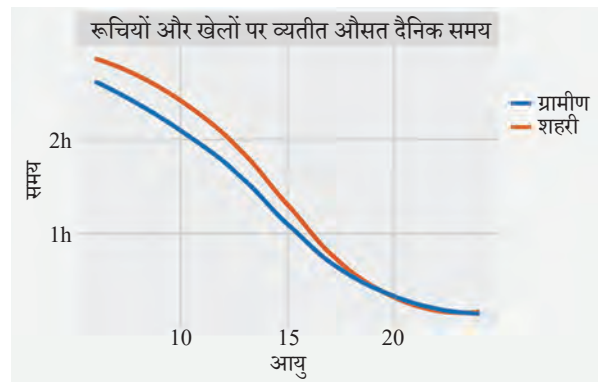
स्रोत— घरेलू उपभोक्ता व्यय सर्वेक्षण, राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण कार्यालय द्वारा विभिन्न वर्षों के आँकड़े

भारत के आँकड़े

- वर्ष 1983 में ग्रामीण क्षेत्रों में अधिकांश लोग प्रकाश के प्राथमिक स्रोत के रूप में केरोसिन का उपयोग करते थे जबकि शहरी क्षेत्रों में अधिकांश लोग बिजली का उपयोग करते थे।
 - ग्रामीण और शहरी दोनों क्षेत्रों में समय के साथ प्राथमिक प्रकाश स्रोत के रूप में केरोसिन का उपयोग कम हुआ है।
 - वर्ष 2000 में शहरी क्षेत्र के 10% घरों में बिजली को प्राथमिक प्रकाश स्रोत के रूप में उपयोग किया गया।
 - वर्ष 2023 में कोई बिजली कटौती नहीं हुई।
11. दिए गए रेखा आलेख के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

- शहरी क्षेत्रों में 10 वर्ष की आयु के बच्चे प्रतिदिन रुचियों और खेलों पर कितना समय व्यतीत करते हैं?
- ग्रामीण बच्चों द्वारा किस आयु में रुचियों और खेलकूद पर प्रतिदिन व्यतीत किया जाने वाला औसत समय 1.5 घंटे है?

- 8 वर्ष
- 10 वर्ष
- 12 वर्ष
- 14 वर्ष
- 18 वर्ष



(iii) क्या निम्नलिखित कथन सही हैं?

- (a) 15 वर्ष की आयु के बच्चों द्वारा रुचियों और खेलों पर प्रतिदिन व्यतीत औसत समय, 10 वर्ष की आयु के बच्चों द्वारा व्यतीत औसत समय का दोगुना है।
- (b) 15 वर्ष की आयु के सभी ग्रामीण बच्चे प्रतिदिन कम-से-कम 1 घंटा रुचियों और खेलों में व्यतीत करते हैं।

12. व्यक्तिगत परियोजना— सप्ताह के विभिन्न दिवसों के लिए स्वयं की गतिविधि पट्टिका बनाएँ।

- (i) क्या आप प्रतिदिन नियमित समय पर भोजन करते हैं और सोते हैं? सामान्यतः आप घर से बाहर कितना समय व्यतीत करते हैं?
- (ii) प्रत्येक गतिविधि में व्यतीत औसत समय की गणना कीजिए। दिन के इस औसत को एक पट्टिका के उपयोग से दर्शाइए।
- (iii) इसी प्रकार घर के किसी भी वयस्क की गतिविधियों को देखिए। अपने आँकड़ों की तुलना उनके आँकड़ों से कीजिए।



13. लघु समूह परियोजना— 3 से 4 सदस्यों का एक समूह बनाइए। निम्नलिखित में से कम-से-कम एक कार्य कीजिए।



- (i) अपने परिवार के सभी सदस्यों की दैनिक निद्रा समयावधि का एक सप्ताह तक अवलोकन कीजिए। दैनिक निद्रा समयावधि में रात की निद्रा, झपकी और दिन के समय की कोई भी निद्रा सम्मिलित होती है।
 - (a) इसे पट्टिकाओं पर दर्शाइए।
 - (b) अपने समूह के सभी सदस्यों के आँकड़ों को एकत्र कीजिए। बच्चों, वयस्कों और वृद्धों की निद्रा समयावधि का औसत और माध्यिका ज्ञात कीजिए।
 - (c) अपने निष्कर्ष और अवलोकन साझा कीजिए।
- (ii) विद्यालय प्रातः कब खुलते हैं और कब बंद होते हैं? कार्य सप्ताह के किसी दिन मनोज का विद्यालय सुबह 9:30 बजे खुलता है और शाम 4:30 बजे बंद होता है अर्थात् कक्षा-अध्ययन और मध्यांतर सहित कुल 7 घंटे। विभिन्न विद्यालयों के कक्षा 8 के दैनिक समय के संदर्भ में सूचना एकत्र कीजिए जिसमें कक्षा-अध्ययन और मध्यांतर का समय भी सम्मिलित हो (विद्यालय देशभर में कहीं भी हो सकते हैं। आप अपने पड़ोसियों, संबंधियों, अभिभावकों और मित्रों से पूछकर पता लगा सकते हैं)। एकत्रित आँकड़ों का विश्लेषण कीजिए एवं प्रस्तुत कीजिए।

14. आगे दिए गए आलेख भारत के 4 स्थानों पर संपूर्ण वर्ष में सूर्योदय और सूर्यास्त के समय को दर्शाते हैं। आलेखों की संरचना पर ध्यान दीजिए। क्या आप पहचान सकते हैं कि कौन-सी रेखाएँ सूर्योदय को दर्शाती हैं और कौन-सी सूर्यास्त को दर्शाती हैं?



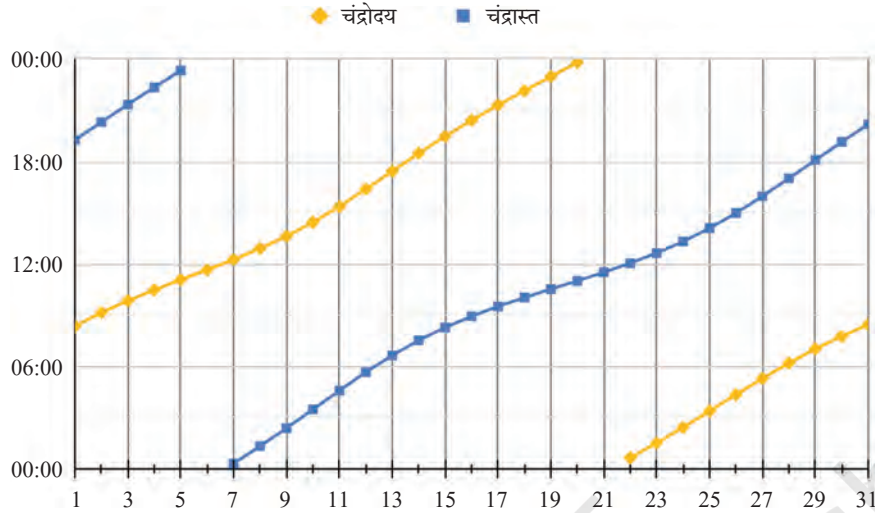
दिए गए आलेखों पर आधारित निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

- जनवरी माह में सूर्य सर्वप्रथम किस स्थान पर उदय होता है? जनवरी में इस स्थान पर दिन की अनुमानित लंबाई कितनी है?
- वर्ष में सबसे लंबा दिन किस स्थान पर होता है?
- आपको इसमें क्या रोचक लगा? अपने अवलोकन साझा कीजिए। आप क्या ज्ञात करने के लिए उत्सुक हैं?

15. हम सभी सूर्योदय और सूर्यास्त के सामान्य समय जानते हैं। क्या आप जानते हैं कि चंद्रमा कब उदय और अस्त होता है? क्या यह सूर्य की तरह एक नियमित प्रतिरूप का पालन करता है? आइए, ज्ञात करते हैं। आगे दिया आलेख एक माह के दौरान चंद्रोदय और चंद्रास्त का समय दर्शाता है—

- (i) ज्ञात कीजिए कि इस माह में अमावस्या (नव चंद्र) और पूर्णिमा (पूर्ण चंद्र) किस दिनांक को थी।
- (ii) आपने क्या अवलोकन किया? आपको इसमें क्या आश्चर्यपूर्ण लगा?

प्रयास
कीजिए



सारांश

- गत वर्ष हमने माध्य को एक उचित रूप से साझा करने के रूप में पढ़ा था। यहाँ हमने सीखा कि माध्य के बाईं ओर के मानों की दूरियों का योग और दाईं ओर के मानों की दूरियों का योग बराबर होता है।
- हमने देखा कि जब माध्य से बड़े मान आँकड़ों में सम्मिलित किए जाते हैं तो माध्य बढ़ जाता है। जब माध्य से छोटे मान आँकड़ों में सम्मिलित किए जाते हैं तो माध्य घट जाता है। ऐसा ही परिवर्तन माध्यिका के साथ भी देखा जा सकता है।
- समय के साथ होने वाले परिवर्तन को दर्शाने के लिए रेखा आलेखों का प्रयोग किया जा सकता है।
- हमने देखा कि आँकड़ों के विश्लेषण से नए प्रश्न मिल सकते हैं और आगे के विश्लेषणों के लिए नई दिशाएँ मिल सकती हैं।



पहेली का समय!

हेक्स का खेल

हेक्स दो खिलाड़ी वाला एक रणनीति खेल है जो समचतुर्भुज आकार के पट्ट पर खेला जाता है। यह खेल सामान्यतया 11×11 आकार के षट्भुजाकार खानों से बना होता है। प्रत्येक खिलाड़ी को एक रंग और पट्ट के दो विपरीत छोर दिए जाते हैं। खिलाड़ी बारी-बारी से अपने रंग का एक मोहरा किसी भी रिक्त खाने पर रखते हैं। एक बार रखने के पश्चात मोहरे को हिलाया या हटाया नहीं जा सकता। मोहरों को रखने का उद्देश्य इनसे एक ही रंग की अटूट शृंखला बनाना है जो दोनों दिए गए किनारों को जोड़े। जो खिलाड़ी एक किनारे से विपरीत किनारे तक यह शृंखला पहले पूरी कर लेता है वह खेल जीत जाता है। नीचे दिए गए चित्र दो संभावित खेल दिखाते हैं, जिनमें से पहले में नीला रंग और दूसरे में लाल रंग के मोहरों का खिलाड़ी जीतता है।

यहाँ एक रिक्त पट्ट है। आप प्रत्येक पारी खेलने के लिए पेंसिल का उपयोग कर सकते हैं और नई पारी खेलने के लिए चिह्नों को मिटा सकते हैं।

